



سَلَطَانَةُ عُمَانُ
وَزَانَةُ التَّرْبِيَّةِ وَالْتَّعْلِيمِ

تتقدّم بثقة
Moving Forward
with Confidence

رؤيه عمان
2040
OmanVision

الرياضيات

كتاب الطالب

٩



الفصل الدراسي الأول
الطبعة التجريبية ١٤٤٣هـ - ٢٠٢٣م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS



الرياضيات

كتاب الطالب

٩

الفصل الدراسي الأول
الطبعة التجريبية ٤٤٣ هـ - ٢٠٢١ م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءاً من الجامعة.
والمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي
المسموح به قانوناً ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من
مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٠ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمت مواعمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف التاسع - من سلسلة
كامبريدج للرياضيات الأساسية والمُوسَّعة IGCSE للمؤلفين كارين موريسون ونيك هامشاو.

تمَّت مواعمتة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج رقم ٤٠ / ٢٠٢٠ .

لا تتحمّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيقى كذلك.

تمَّت مواعمتة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٠٢ / ٢٠١٩ واللجان المنبثقة عنه

محفوظة
جميع الحقوق

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ولا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو جزءاً أو ترجمته
أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال
إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.



حضره صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
– حفظه الله ورعاه –

المغفور له
السلطان قابوس بن سعيد
– طيب الله ثراه –

سلطنة عُمان





النشيد الوطني



جلالة السلطان
بِالْعِزْ وَالْأَمَان
عَاهِلًا مُمَجَّدًا

يَا رَبَّنَا احْفَظْ لَنَا
وَالشَّعْبَ فِي الْأَوْطَانِ
وَلِيَلْدُمْ مُؤَيَّدًا

بِالثُّفُوسِ يُفْتَدِي

أَوْفِياءً مِنْ كِرَامِ الْعَرَبِ
وَأَمْلَئِي الْكَوْنَ الضِّيَاءَ

يَا عُمَانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبِيِّ
فَارْتَقِي هَامَ السَّمَاءَ

وَاسْعَدِي وَانْعَمِي بِالرَّخَاءَ

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلوة والسلام على خير المرسلين، سيدنا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافية؛ لتلبّي مُتطلبات المجتمع الحالية، وتطلّعاته المستقبلية، ولتوافق مع المستجدات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوّناً أساسياً من مكونات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءاً من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتوافق مع فلسفلته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتماماً كبيراً يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقاً مع التطور المتسارع في هذا المجال، من خلال تبني مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتين المادتين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تمية مهارات البحث والتقصي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعزيز فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التأافسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيم واتجاهات، جاء محققاً لأهداف التعليم في السلطنة، ومواءماً للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنية لأنّا نجحنا في إعداد كتاب يخدم طلابنا، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مخلصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمية لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مدحية بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

xiii	المقدمة
الوحدة الأولى: أنواع الأعداد والعمليات عليها	
١-١ الأنواع المختلفة من الأعداد ١٦	١-١
١-٢ الأعداد الأولية ١٩	١-٢
١-٣ القوى والجذور ٢٦	١-٣
١-٤ الأعداد الموجّهة ٣٠	١-٤
١-٥ ترتيب العمليات الحسابية ٣٣	١-٥
الوحدة الثانية: الكسور والتّسـبـ المـئـوـيـةـ	
٢-١ الكسور المـتـكـافـأـةـ ٤٣	٢-١
٢-٢ العمليات على الكسور ٤٤	٢-٢
٢-٣ النسب المـئـوـيـةـ ٥٠	٢-٣
٢-٤ الصيغة العلمية ٥٤	٢-٤
٢-٥ الآلة الحاسبة والصيغة العلمية ٦٠	٢-٥
٢-٦ الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية .. ٦٢	٢-٦
الوحدة الثالثة: فهم الجبر	
٣-١ استخدام الحروف (المـتـغـيرـاتـ) لـتمـثـيلـ الـقـيـمـ المـجهـولـةـ ٧٠	٣-١
٣-٢ التعويض ٧٣	٣-٢
٣-٣ تبسيط العبارات الجبرية ٧٥	٣-٣
٤-٣ التعامل مع الأقواس ٨٠	٤-٣
٥-٣ الأسس ٨٤	٥-٣
الوحدة الرابعة: الدوائر والخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسية	
٤-١ الدائرة ٩٦	٤-١
٤-٢ الزوايا ٩٨	٤-٢
٤-٣ الإنشاءات الهندسية ١٠٨	٤-٣
٤-٤ المـمـلـثـاتـ ١١٧	٤-٤
٤-٥ الأشكال الرباعية ١٢٢	٤-٥
٤-٦ مـضـلـعـاتـ أخرى ١٢٥	٤-٦
الوحدة الخامسة: التقدير والتقرير	
٥-١ تقرير الأعداد ١٣٢	٥-١
٥-٢ التقدير ١٣٤	٥-٢
٥-٣ الحدود العليا والحدود الدنيا ١٣٦	٥-٣
الوحدة السادسة: المـعادـلاتـ والمـتـباـينـاتـ والصـيـغـ	
٦-١ فـكـ الأـقوـاسـ ١٤٦	٦-١
٦-٢ تحليل العبارات الجبرية إلى عوامل .. ١٤٨	٦-٢
٦-٣ استخدام الصيغ وإعادة تنظيمها ١٥٠	٦-٣
٦-٤ حل المـعادـلاتـ ١٥٥	٦-٤
٦-٥ المـعادـلاتـ الخـطـيـةـ الآـنـيـةـ ١٦٠	٦-٥
٦-٦ كتابة المـعادـلاتـ لـحلـ المسـائـلـ ١٦٨	٦-٦
٦-٧ المـتـباـينـاتـ الخـطـيـةـ ١٧٢	٦-٧

الوحدة السابعة: المستقيمات

١-٧ رسم المستقيمات	١٨٠
٢-٧ القطعة المستقيمة	١٩٩

الوحدة الثامنة: التماثُل والتحويلات**الهندسية**

١-٨ التماثُل في الأشكال ثُنائِيَّة الأبعاد	٢٠٦
٢-٨ التماثُل في الأشكال ثُلاثِيَّة الأبعاد ...	٢١٠
٣-٨ التحويلات الهندسية	٢١٣
٤-٨ تركيب التحويلات الهندسية	٢٢٩

الوحدة التاسعة: المُتتاليات والمجموعات

١-٩ المُتتاليات	٢٤٠
٢-٩ المجموعات	٢٤٨
مصطلحات علمية	٢٦٢

المقدمة

يرتكز هذا الكتاب المدرسي على كتاب معروف وناجح تمت كتابته للمرة الأولى بالاستناد إلى منهج كامبريدج IGCSE في الرياضيات (٠٥٨٠ / ٠٩٨٠). وهو يُعطي المنهج الدراسي بأكمله ضمن مجموعة متكاملة تُعطى لجميع الطلاب والمعلمين.

تم تأليف الكتاب، بحيث تستطيع العمل فيه بالتدريج من البداية إلى النهاية. تعتمد جميع الوحدات على المعرفة والمهارات التي تعلّمتها في السنوات السابقة، وتُبني بعض الوحدات اللاحقة على المعرفة التي تم تطويرها في الكتاب من قبل. وسوف تساعدك فقرات ‘فائدة’ و‘سابقاً’ و‘لاحقاً’ على ربط محتوى الوحدات بما تعلّمته سابقاً، والإضافة على المكان الذي ستستخدم فيه تلك المعرفة مره أخرى في الدروس اللاحقة.

سابقًا

من المهم أن تتذكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية قبل البدء بهذا الدرس.

لاحقاً

لاحقاً، ستتعامل مع ضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور مرة ثانية عند التعامل مع المقادير الجبرية.

المسار المقترن للعمل في الكتاب هو:

الفصل الدراسي الأول للصف التاسع: الوحدات من ١ إلى ٩

الفصل الدراسي الثاني للصف التاسع: الوحدات من ١٠ إلى ١٨

ميزات رئيسية

تُفتح كل وحدة بقائمة من المفردات وأخرى من الأهداف التي ستعلمها في الوحدة، ومقدمة تعرض نظرة عامة عن كيفية استخدام الرياضيات في الحياة الواقعية.

هناك أيضاً قائمة بالمفردات الرياضية الرئيسية. يشار إلى هذه المفردات في متن الدروس باللون الأزرق، حيث يتم استخدامها وشرحها.

تقسم الوحدات إلى أقسام (دروس)، يُعطي كل منها موضوعاً معيناً. ويتم تقديم وشرح المفاهيم في كل موضوع، ويتم إعطاء أمثلة لتقديم طرائق مختلفة للعمل بطريقة عملية وسهلة المتابعة.

تقدِّم التمارين الخاصة بكل موضوع أسئلة متَّوْعَدة، وبمستويات مختلفة، تسمح للطالب بالتدريب على الأساليب التي تم تقديمها في الدرس. تترواح هذه التمارين بين الأنشطة البسيطة والتطبيقات وحل المسائل.

يرد ملخص لكل وحدة تُعرض فيه المعارف والمهارات التي يجب أن تمتلكها عند الانتهاء من العمل في الوحدة. يمكنك استخدام هذا الملخص كقائمة عند المراجعة، للتحقق من تغطية المطلوب معرفته في الوحدة.

ترد بعض التمارين الموجزة في نهاية كل وحدة.

مُهِمَّاتٌ فِي الْهَامِشِ

تتضمن الإرشادات المفيدة في هوامش الكتاب ما يلي:

مفاتيح: وهي تعليقات عامة تذكر بمعلومات مُهمة أو أساسية مفيدة للتعامل مع تمرين ما. وأنت بمطلق الأحوال مستفيد من معرفتها. غالباً ما توفر هذه المفاتيح معلومات إضافية أو دعماً إضافياً في موضوعات قد تكون مُلتبسة.

مساعدة: تُغطي الأخطاء الشائعة بناءً على تجارب المؤلفين مع طلابهم، وتحثك أشياء يجب أن تتذكرها أو أن تكون حذراً منها.

مساعدات في حل المسائل: أنشاء عملك في العام الدراسي، سوف تطور 'صندوق الأدوات' الخاص بك والمتعلق بمهارات واستراتيجيات حل المسائل. سوف يذكرك هذا الصندوق بإطار حل المسائل ويحثك على اقتراح طرائق لمعالجة أنواع مختلفة من المسائل.

روابط مع موضوعات أخرى: لا يتم تعلم مادة الرياضيات بمُعزل عن المواد الأخرى. وسوف تستخدم وتطبق ما تعلمه في الرياضيات على العديد من المواد الدراسية الأخرى. تشير هذه النواخذة إلى كيفية الاستفادة من المفاهيم الرياضية في موضوعات أخرى.

مساعدة !

انتبه للأعداد السالبة التي تسبق الأقواس لأنها تحتاج دائمًا إلى اهتمام مضاعف.

مصادر إضافية

دليل المعلم: هذا الكتاب متوفّر لمعلميك. وهو يتضمّن، إضافة إلى الأشياء الأخرى، بطاقات مراجعة لكل وحدة، بالإضافة إلى إجابات جميع التمارين وتمارين نهاية الوحدة.

كتاب النشاط: يتبع هذا الكتاب وحدات دروس كتاب الطالب، ويقدّم تمارين إضافية هادفة لمن يرغب منكم في المزيد من التدريبات. ويتضمّن أيضاً ملخصاً للمفاهيم الأساسية، إضافة إلى 'المفاتيح' و'المساعدات' بهدف توضيح الموضوعات المُلتبسة.

تنذّر أن 'المعامل' هو العدد الذي يقع إلى جانب المتغير في الحد.

يعتبر تحويل المعلومات من صيغ لفظية إلى مخططات أو معادلات من الاستراتيجيات المفيدة لحل المسائل.

الوحدة الأولى: أنواع الأعداد والعمليات عليها



يُعدّ البنك المركزي العماني مصرف سلطنة عمان الرسمي، حيث يحتفظ بالودائع. أنشئ البنك المركزي العماني في الأول من ديسمبر ١٩٧٤ كنتيجة طبيعية لتطور النظام النقدي والمالي في السلطنة وهو يُسهم في المحافظة على قيمة العملة الوطنية (الريال العماني) في الداخل والخارج. تُستخدم في المصادر أنواع مختلفة من الأعداد، منها الكاملة والصحيحة والنسبية، ومنها الموجبة (الودائع)، والسلبية (القروض).

يُسمى نظامنا العددي المستخدم بالنظام الهندي-العربي، لأنه تطور على أيدي علماء الرياضيات في الهند، وانتشر بواسطة التجار العرب الذين جلبوه معهم عندما تحرّكوا في أماكن مختلفة من العالم. ويُعدّ النظام الهندي-العربي نظاماً عشرياً، ويعني ذلك أنه يستخدم القيمة المكانية، مُعتمدًا على قوى العدد عشرة، حيث يمكن كتابة الأعداد، بما فيها الكسور العشرية والكسور، باستخدام القيمة المكانية والأرقام من ٠ إلى ٩.

المفردات

- Real number العدد الحقيقي
- Natural number العدد الطبيعي
- Integer العدد الصحيح
- Prime number العدد الأولي
- Symbol الرمز
- Multiple المُضاعف
- Factor العامل
- Composite numbers العدد غير الأولي
- Prime factor العامل الأولي
- Square مُربع العدد
- Square root الجذر التربيعي
- Cube مكعب العدد
- Cube root الجذر التكعيب
- Directed numbers الأعداد الموجّهة

سوف تتعلم في هذه الوحدة

- كيف:
- تحدد أنواعاً مختلفة من الأعداد وتصنفها.
 - تجد العوامل المشتركة والمُضاعفات المشتركة للأعداد.
 - تكتب أعداداً في صورة نواتج ضرب عواملها الأولية.
 - تحسب مربعات الأعداد والجذور التربيعية للأعداد ومكعبات الأعداد والجذور التكعيبية للأعداد.
 - تعامل مع أعداد صحيحة في مسائل من واقع الحياة اليومية.
 - تستخدم قواعد ترتيب العمليات الحسابية لإجراء الحسابات على الأعداد.
 - تجري العمليات الحسابية باستخدام طرائق الحساب الذهي والآلة الحاسبة.

فائدة



يجب أن تكون معظم مفاهيم الأعداد مألوفة لديك. سوف تساعدك هذه الوحدة على مراجعة المفاهيم والتحقق من تذكرها.

١- الأنواع المختلفة من الأعداد

كل الأعداد التي تعاملت معها في الرياضيات حتى الآن هي أعداد حقيقية. وأنت تعرف أنواعاً مختلفة من الأعداد، منها **الأعداد الفردية والزوجية**، **الأعداد الأولية**، **الأعداد الموجبة والأعداد السالبة**، **والكسور**، **والأعداد العشرية**. وفي الوحدة الثانية، سوف تتعرف على **الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية**.

تأكد من أنك تعرف المفردات الرياضية الصحيحة لأنواع الأعداد في الجدول الآتي:

المثال	التعريف	العدد
..., ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ...	أيّ عدد كامل من ١ إلى ما لا نهاية، وتسُمى الأعداد الطبيعية أحياناً «أعداد العد» ولا تتضمن الصفر.	العدد الطبيعي
..., ٣، ٢، ١، ٠، ١٠، ٢٠، ...، ٣	الأعداد الكاملة الموجبة والسالبة والصفر.	العدد الصحيح
..., ١، ٢، ٣، ٥، ٧، ...	عدد كامل لا يمكن قسمته على ٢ بدون باقٍ.	العدد الفردي
..., ٠، ٤، ٦، ٨، ...	عدد كامل يمكن قسمته على ٢ بدون باقٍ.	العدد الزوجي
..., ٢، ٥، ٧، ١١، ...	عدد كامل أكبر من ١، وله عاملان فقط: العدد نفسه و ١	العدد الأولي
..., ١، ٤، ٩، ١٦، ...	ناتج ضرب العدد الصحيح في نفسه.	مربع العدد
..., ٥، ٠، ٢، ٠، ٠، ٨، ٠، ٧، ١، ٢، ١٣، ١٤، ١٣، ١٢، ١١	عدد يمثل جزءاً من عدد كامل، يمكن كتابته في صورة $\frac{ج}{د}$ حيث $ج \neq 0$ في صورة عدد عشريّ باستخدام العلامة العشرية.	الكسر والعدد العشري
١٢ × ٣، ١٢ × ٢، ١٢ × ١، ٢٤، ١٢، ٣٦	يتم إيجاد مضاعف عدد عندما تضربه في عدد صحيح موجب. أول مضاعف لأي عدد هو العدد نفسه (العدد مضروب في العدد ١).	المضاعف
٢، ٨، ٢٤، ١٢، ٣٦	عدد يقسم عدداً آخر بدون باقٍ. العدد ١ هو عامل لكل عدد. أكبر عامل لأي عدد هو العدد نفسه.	العامل

تمارين ١-١

(١) أعد كتابة كل من العبارات الآتية باستخدام الرموز الرياضية:

- أ** $12 > 18$ يساوي ≈ 30
- ب** مجموع $3, 4$, لا يساوي ناتج ضرب $3, 4$
- ج** $-34 < -16$ أصغر من 2 ضرب
- د** إذن، العدد s أصغر من الجذر التربيعي للعدد 72 , أو يساويه
- هـ** $\pi \approx 3,14$ تقريرياً
- و** $5,01 > 0,01$ أكبر من
- ز** ناتج ضرب العدد 12 في العدد s أكبر من -40

=	يساوي
≠	لا يساوي
≈	يساوي تقريباً
>	أصغر
≤	أصغر أو يساوي
>	أكبر
≥	أكبر أو يساوي
∴	إذن
✓	الجذر التربيعي

(٢) حدد أي من العبارات الرياضية الآتية صحيحة وأي منها خاطئة، ثم صّح العبارة إن

كانت خاطئة:

- | | |
|--|---|
| ب $1000 \approx 1999 \times 5$ | أ $6,0 < 0,599$ |
| د $6,2 + 4,3 = 4,3 + 6,2$ | ج $8\frac{1}{10} = 8,1$ |
| و $6 = 6,0$ | هـ $8 \times 21 \leq 9 \times 20$ |
| حـ $20 \geq 19,9$ | ز $4^- < 12^-$ |
| يـ $4 = \overline{16}7$ | طـ $5 \times 199 < 1000$ |
| لـ $20 \div 5 = 4 \div 20$ | كـ $250 \neq 2 \times 5 \times 25$ |
| نـ $20 \times 4 \neq 4 \times 20$ | مـ $20 - 4 \neq 4 - 20$ |

(٣) اكتب كلاماً مما يلي:

- أ** مُضاعفات العدد 4 الواقعة بين العددين 29 و 53
- بـ** مُضاعفات العدد 50 الأصغر من 400
- جـ** مُضاعفات العدد 100 الواقعة بين العددين 4000 و 5000

(٤) لديك أربعة أعداد ٨٣٧ ٨١٦ ٧٨٣ ٣٢٤

- أ** أيٌ من هذه الأعداد من مُضاعفات العدد 612
- بـ** أيٌ من هذه الأعداد ليس من مُضاعفات العدد 627

١٨	هـ	١١	دـ	٨	جـ	٥	بـ	٤	أـ
٩٠	يـ	٥٧	طـ	٤٠	حـ	٢٥	زـ	١٢	وـ
٣٦٠	سـ	١٥٣	نـ	١٦٠	مـ	١٣٢	لـ	١٠٠	كـ

٦) ضع علامة (✓) امام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) امام العبارة الخاطئة فيما يلي:

- أـ ٢ هو عامل من عوامل العدد ٢١٢
- بـ ٩ هو عامل من عوامل العدد ٩٩
- جـ ٢ هو عامل من عوامل العدد ٣٠٠
- دـ ٢ هو عامل من عوامل العدد ٣٠٠
- هـ ٢ هو عامل من عوامل العدد ١٢٢٤٨٨
- وـ ١٢ هو عامل من عوامل العدد ٦٠
- زـ ٢١٠ هو عامل من عوامل العدد ٢١٠
- حـ ٨ هو عامل من عوامل العدد ٤٢٠

٧) ما أصغر عامل وأكبر عامل لأيّ عدد مُعطى؟ أعطِ مثلاً على ذلك.

٢-١ الأعداد الأولية

العدد الأولي هو عدد كامل أكبر من الواحد، وله عاملان فقط: العدد نفسه والواحد، أما

الأعداد غير الأولية فلها أكثر من عاملين.

العدد ١ له عامل واحد فقط (حالة خاصة)، لذلك فهو ليس عدداً أولياً وليس عدداً غير أولياً.

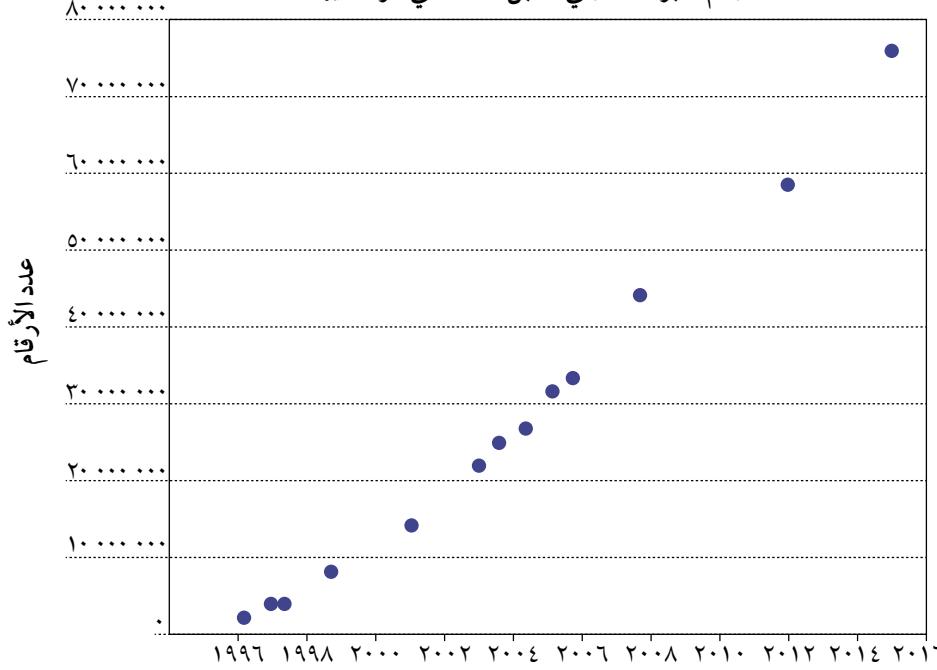
٢-١-١ إيجاد الأعداد الأولية

قبل أكثر من ٢٠٠٠ عام، قام عالم يوناني يُدعى إراتوستينس Eratosthenes بصنع أداة سهلة لفرز الأعداد الأولية. تُسمى تلك الأداة "غريال إراتوستينس". يبيّن المخطط أدناه كيف يعمل الغريال على الأعداد حتى ١٠٠

اشطب العدد ١ لأنّه ليس أولياً.	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ضع دائرة حول العدد ٢، ثم اشطب مضاعفاته العدد ٢ الأخرى.	٢٠	(١٩)	٢٨	(١٧)	٢٦	٢٥	٢٤	(١٣)	٢٢	(١١)
ضع دائرة حول العدد ٣، ثم اشطب مضاعفاته العدد ٣ الأخرى.	٣٠	(٢٩)	٢٨	٣٧	٣٦	٣٥	٣٤	(٢٣)	٣٢	٣١
ضع دائرة حول العدد التالي المتواافق، ثم اشطب جميع مضاعفاته الأخرى.	٤٠	٣٩	٣٨	(٣٧)	٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	٣٢	(٣١)
كرر العمل حتى يظهر أن جميع الأعداد إما وُضع حولها دائرة وإماً شطبت.	٥٠	٤٩	٤٨	(٤٧)	٤٦	٤٥	٤٤	(٤٣)	٤٢	(٤١)
الأعداد التي وضع دائرة حولها هي الأعداد الأولية.	٦٠	(٥٩)	٥٨	٥٧	٥٦	٥٥	٥٤	(٥٣)	٥٢	٥١
	٧٠	٦٩	٦٨	(٦٧)	٦٦	٦٥	٦٤	٦٣	٦٢	(٦١)
	٨٠	(٧٩)	٧٨	٧٧	٧٦	٧٥	٧٤	(٧٣)	٧٢	(٧١)
	٩٠	(٨٩)	٨٨	٨٧	٨٦	٨٥	٨٤	(٨٣)	٨٢	(٨١)
	١٠٠	٩٩	٩٨	(٩٧)	٩٦	٩٥	٩٤	٩٣	٩٢	٩١

طُور علماء رياضيات آخرون عدة طرق لإيجاد أعداد أولية أكبر. وحتى العام ١٩٥٥م كان أكبر عدد أولي معروف مكوناً من أقل من ١٠٠٠ رقم. ومنذ سبعينيات القرن الماضي، ومع اختراع حواسيب متقدمة، أصبح من السهولة إيجاد الأعداد الأولية أكثر فأكثر. يبيّن الرسم البياني الآتي أعداد أرقام أكبر أعداد أولية عُرفت خلال الفترة من ١٩٩٦م إلى ٢٠١٦م.

عدد أرقام أكبر عدد أولي مقابل السنة التي عُرف فيها



والاليوم، يمكن لأي شخص أن يتبع طريقة مرسين للبحث عبر الإنترن트 عن الأعداد الأولية (Great Internet Mersenne Prime Search). يربط هذا المشروع بينآلاف الحواسيب المنزلية للبحث باستمرار عن أعداد أولية أكبر وأكبر، شرط أن تكون سعة الحواسيب كافية.

تمارين ٢-١-أ

- (١) ما العدد الزوجي الأولي الوحيد؟
- (٢) اكتب الأعداد غير الأولية الأكبر من ٤، والأصغر من ٣٠
- (٣) اكتب عدداً زوجياً أكبر من ٢ يمكن كتابته في صورة مجموع عددين أوليين. مثلاً: $6 = 3 + 3$ ، $8 = 5 + 3$
- (٤) توائم الأعداد الأولية هي أزواج من أعداد أولية الفرق بينهما اثنان. اكتب توائم الأعداد الأولية حتى ١٠٠ هل العدد ١٤٩ عدد أولي؟ وضح إجابتك.

لاحظاً

يمكن أن تساعدك المعرفة الجيدة بالأعداد الأولية في تبسيط الكسور.

٢-٢-ب العوامل الأولية

العوامل الأولية هي عوامل للعدد، وهي أيضاً أعداد أولية. يمكن لكل عدد أن يُجزأ ويُكتب في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية. يمكن إجراء ذلك باستخدام **مخطط الشجرة**، أو باستخدام القسمة. يعرض المثال (١) الطريقتين.

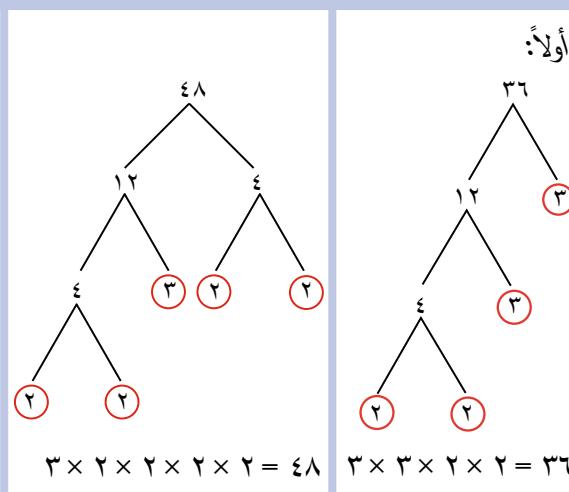
مثال ١

- اكتب كلاً من العددين الآتيين في صورة ناتج ضرب عوامل أولية:
- ١ ٣٦ ب ٤٨
 - أولاً: باستخدام شجرة العوامل
 - ثانياً: باستخدام القسمة (التحليل)

الحل

تذكّر أن ناتج الضرب هو جواب عملية ضرب. فإذا كتبت عدداً في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية، فإنك تكتبه باستخدام إشارات الضرب مثل: $3 \times 2 \times 2 = 12$

جزء العدد إلى عاملين.
إذا كان العامل أولياً، ضع دائرة حوله.
إذا كان العامل غير أولي، جزئه مرة أخرى إلى عاملين.
استمر في التجزئة حتى تنتهي جميع فروع الشجرة بعوامل أولية.
اكتب الأعداد الأولية بالترتيب التصاعدي وافصل بين كل عددين منها بإشارة \times



كل عدد من الأعداد الأولية له عاملان فقط: ١ والعدد نفسه. بما أن العدد ١ ليس أولياً، فلا تذكره عند التعبير عن عدد بصورة ناتج ضرب عوامله الأولية.

الحل:

اقسم على أصغر عدد أولي يقسم العدد المعطى بدون باقٍ.

استمر في القسمة مستخدماً أصغر عدد أولي يقسم العدد الجديد في كل مرة.

توقف عندما تنتهي بالعدد 1 اكتب العوامل الأولية بالترتيب التصاعدي، وافصل بين كل عددين منها بإشارة \times

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 2 \mid 24 \\ 2 \mid 12 \\ 2 \mid 6 \\ 3 \mid 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

ثانياً:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 2 \mid 18 \\ 3 \mid 9 \\ 3 \mid 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

اختر الطريقة التي تناسبك، واعتمدها. بين طريقتك دائماً عند استخدام العوامل الأولية.

تمارين ١-٢-ب

(١) اكتب كل عدد من الأعداد الآتية في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية:

٣٦٠	٩٢٤٠	٥٠٤	٣٠	١
ه	ي	و	ب	ج

٢-ج استخدام العوامل الأولية لـ إيجاد:**أولاً: المضاعف المشترك الأصغر (م م ص)**

المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر هو أصغر عدد مضاعف مشترك لجميع الأعداد المعطاة.

مثال ٢

أوجد المضاعف المشترك الأصغر (م م ص) للعددين ٤ و ٧

الحل:

اكتب بعض مضاعفات العدد ٤ (ملحوظة: M هي $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots$). m تعني مضاعفات العدد ٧).

اكتب بعض مضاعفات العدد ٧ m هي $7, 14, 21, 28, 35, 42, \dots$

أوجد أول عدد مشترك بين مضاعفات العددين.

هذا هو المضاعف المشترك الأصغر (م م ص)

م م ص هو ٢٨

عندما تتعامل مع أعداد كبيرة، يمكنك أن تحديد (م م ص) من خلال تحليل العدد إلى عوامله الأولية.

مثال ٣

أوجد المضاعف المشترك الأصغر (م م ص) للعددين ٧٢ و ١٢٠

الحل:

اكتب كل عدد في صورة حاصل ضرب عوامله الأولية.

$$2 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$$

$$5 \times 3 \times 2 \times 2 = 120$$

ضع خطًا تحت جميع عوامل العدد الأصغر.

$$360 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

ضع خطًا تحت جميع العوامل الأولية للعدد الأكبر غير المشتركة مع عوامل العدد الأصغر.

$$360 \text{ هو } 360$$

اضرب جميع العوامل التي تحتها خط للعددين لتجد (م م ص).

ثانيًا: العامل المشترك الأكبر (ع م ك)

العامل المشترك، الأكبر لعددين أو أكثر هو العدد الأكبر بين العوامل المشتركة لجميع الأعداد المعطاة.

مثال ٤

أوجد العامل المشترك الأكبر (ع م ك) للعددين ٨ و ٢٤

الحل:

اكتب عوامل كل عدد.

$$\text{ع} \text{ هي } 1, 2, 4, 8$$

ضع خطًا تحت العوامل المشتركة في المجموعتين.

$$\text{ع} \text{ هي } 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$$

حدد أكبر عامل تحته خط. هذا هو العامل المشترك الأكبر (ع م ك).

$$\text{ع م ك هو } 8$$

عندما تتعامل مع أعداد كبيرة، يمكنك أن تحدد (ع م ك) من خلال تحليل العدد إلى عوامله الأولية

مثال ٥

أوجد العامل المشترك الأكبر (ع م ك) للعددين ١٦٨ و ١٨٠

الحل:

اكتب كل عدد في صورة حاصل ضرب عوامله الأولية.

$$7 \times 3 \times 2 \times 2 = 168$$

ضع خطًا تحت العوامل المشتركة في كلا العددين.

$$5 \times 3 \times 2 \times 2 = 180$$

أوجد ناتج ضرب تلك العوامل المشتركة لتجد (ع م ك).

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

$$\text{ع م ك هو } 12$$

للحذف

يمكنك أيضًا استخدام العوامل الأولية لإيجاد الجذور التربوية والتكعيبية للأعداد إن لم يكن لديك آلة حاسبة. وسوف تألف ذلك بشكل أكثر تفصيلاً في هذه الوحدة.

تمارين ١-٢-ج

(١) أوجد (ع م ك) لكل زوج من الأعداد التالية:

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| ٧٨ ، ٥٢ | ٩٠ ، ٧٢ | ١٠٨ ، ٤٨ |
| د | ج | ب |
| ١٢٠ ، ٩٥ | ٦٢٤ ، ٥٤٦ | ١٢٥ ، ١٠٠ |
| ح | ز | و |

(٢) أوجد (م م ص) لكل زوج من الأعداد التالية:

- | | | |
|----------|---------|-----------|
| ٦٠ ، ٤٨ | ٧٢ ، ٦٠ | ٦٠ ، ٥٤ |
| د | ج | ب |
| ١٢٠ ، ٩٠ | ٩٠ ، ٥٤ | ١٨٠ ، ١٢٠ |
| ح | ز | و |

(٣) أوجد (ع م ك) و (م م ص) لكل زوج من الأعداد التالية:

- | | | |
|---------|----------|----------|
| ٨٤ ، ٦٠ | ٢٠٠ ، ٩٥ | ١٠٨ ، ٧٢ |
| د | ج | ب |

طبق مهاراتك

(٤) أجرت محطة إذاعية مسابقة على الهاتف للمُستمعين، بحيث يحصل المُتّصل الثلاثون على قسيمة بث مباشر، ويحصل المُتّصل المئة والعشرون على هاتف محمول مجاناً، فكم مُستمعاً يجب أن يتّصل قبل أن يحصل أحد المستمعين على قسيمة البث المباشر والهاتف المحمول معًا؟

(٥) تُكمل فاطمة الدوران حول مسار ما في ١٢ دقيقة، ويُكمل أخوها سعيد الدوران حول المسار نفسه في ١٨ دقيقة، فإذا بدأ الاشنان من الموقف نفسه، وفي الوقت نفسه، فكم دقيقة ستمضي حتى يعبرما معاً خط البداية مرة ثانية؟

(٦) تقف سعاد وليلي وجهاً لوجه، لتبدأ الفتتان الدوران في اللحظة نفسها، فإذا استغرقت سعاد ٣ ثوانٍ لتُكمل دورة واحدة، واستغرقت ليلي ٤ ثوانٍ لتُكمل دورة واحدة، فكم مرة ستدور سعاد، لتقابل الفتتان وجهاً لوجه مرة ثانية؟

تحتوي المسائل التي تتضمن (م م ص) عادة على أحداث متكررة. وتحتوي المسائل التي تتضمن (ع م ك) عادة على فصل الأشياء إلى قطع أصغر أو ترتيب الأشياء في مجموعات أو صفوف متساوية.

١-٢-د قواعد قابلية القسمة لإيجاد العوامل بسهولة

ترغب أحياناً في معرفة ما إذا كان عدد صغير يقسم عدداً آخر أكبر منه بدون باقٍ. بمعنى آخر، هل يقبل العدد الكبير القسمة على العدد الصغير؟
لتنفيذ هذا العمل، من المفيد استخدام قواعد قابلية القسمة.
يكون **العدد قابلاً للقسمة** بدون باق على:

مساعدة

قابلية القسمة مفيدة عندما تتعامل مع العوامل والأعداد الأولية.

- (٢) إذا كان رقم آحاد العدد واحداً من الأرقام ٠ أو ٢ أو ٤ أو ٦ أو ٨ (أي عدد زوجي)
- (٣) إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد ٣ (يمكن قسمته على العدد ٣)
- (٤) إذا كان رقماً آحاد العدد وعشرياته معاً يقبلان القسمة على العدد ٤

- (٥) إذا كان رقم آحاد العدد صفرًا أو ٥
 (٦) إذا كان يقبل القسمة على العددان ٢ و ٣ معاً
 (٨) إذا كانت أرقام آحاد وعشرات ومئات العدد معاً تقبل القسمة على العدد ٨
 (٩) إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد ٩ (يمكن قسمته على العدد ٩)
 (١٠) إذا كان رقم آحاد العدد صفرًا

ليس من السهل إيجاد قاعدة لقابلية القسمة على العدد ٧، رغم أن مضاعفاته لها خصائص مهمة يمكنك استقصاؤها على الإنترنت.

تمارين ١-٢-٤

١) انظر إلى الأعداد في الإطار أدناه. أي منها:

١٢٢٣ ٧٩٨ ٦٤ ٢١ ٥٠٠ ٧٠ ١٠٤ ١٠ ٩٢ ٦٥ ٢٣

أ) يقبل القسمة على العدد ٩٥

ب) يقبل القسمة على العدد ٩٨

ج) يقبل القسمة على العدد ٩٣

٢) أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ؟

ب) يقبل العدد ٨٨ القسمة على ٣ أ) يقبل العدد ٦٢٥ القسمة على ٥

د) يقبل العدد ٣٤٦ القسمة على ٤ ج) يقبل العدد ٦٤٠ القسمة على ٦

هـ) يقبل العدد ٤٧٦ القسمة على ٨ و) يقبل العدد ٢٣٤٠ القسمة على ٩

ز) يقبل العدد ٤٥٦٢ القسمة على ٦ ح) يقبل العدد ٢٨٩٠ القسمة على ٦

ط) يقبل العدد ٤٠٠٩٠ القسمة على ٥ ي) يقبل العدد ١٢٣٤٥٦ القسمة على ٩

٣) هل يمكن تقسيم المبلغ ٣٤٠٧ ريالاً عمانيًا بدون باقي على:

أ) شخصين؟

ب) ثلاثة أشخاص؟

ج) تسعة أشخاص؟

٤) يحتوي ملعب رياضي على ٢٠٢٠٨ مقعد. هل يمكن توزيع هذه المقاعد بالتساوي

على:

أ خمسة أقسام؟

ب ستة أقسام؟

ج تسعة أقسام؟

٥) أ إذا كان عدد ما يقبل القسمة على ١٢، فما الأعداد الأخرى التي يقبل القسمة

عليها؟

ب إذا كان عدد ما يقبل القسمة على ٣٦، فما الأعداد الأخرى التي يقبل القسمة

عليها؟

ج كيف يمكنك التحقق من أن عدداً ما يقبل القسمة على ١٢ و ١٥ و ٣٦؟

٣-١ القوى والجذور

سابقاً

تدنى أن ناتج ضرب العدد الصحيح في نفسه هو مربع العدد.

فُرّقيات الأعداد والجذور التربيعية

يتم تربيع العدد عند ضربه في نفسه. مثلاً: مربع العدد ٥ هو $5 \times 5 = 25$
رمز التربيع هو $(^2)$ ، إذن، يمكن كتابة 5×5 في صورة $(^2 5)$

الجذر التربيعي لعدد هو العدد الذي تم ضربه في نفسه للحصول على مربع العدد.
ويُرمز إلى الجذر التربيعي بالرمز $\sqrt{}$. تعرف أن $\sqrt{25} = 5$ ، أي أن $5^2 = 25$.

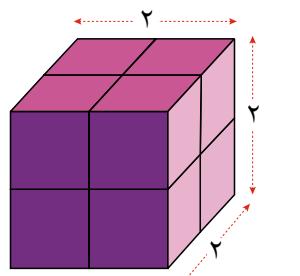
مكعبات الأعداد والجذور التكعيبية

يتم تكعيب العدد عند ضربه في نفسه، ثم ضرب الناتج في العدد الأصلي مرة أخرى.
مثلاً، مكعب العدد ٢ هو $2 \times 2 \times 2 = 8$. رمز التكعيب هو $(^3)$ ، إذن، يمكن كتابة $2 \times 2 \times 2$ في صورة $(^3 2)$

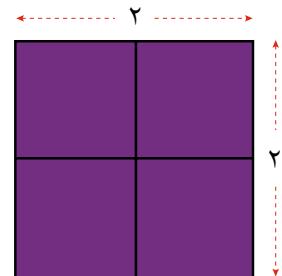
الجذر التكعيبية لعدد هو العدد الذي تم ضربه في نفسه ثم ضرب الناتج في العدد الأصلي مرة أخرى للحصول على مكعب العدد. رمز الجذر التكعيب هو $\sqrt[3]{}$. تعرف أن $\sqrt[3]{8} = 2$ ، أي أن $2^3 = 8$

رابط

تُستخدم الأساس الكسرية والجذور في حسابات مالية متعددة تتضمن الاستثمار والتأمين والقرارات الاقتصادية.



ب يمكن تنظيم الأعداد المكعبة لنكون مجسمًا مكعب الشكل.



أ يمكن تنظيم الأعداد المربعة لتكون شكلًا مربعاً.

لإيجاد الجذور التربيعية والتكمعيبة، يمكنك كتابة العدد المربع والعدد المكعب في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية، وتجميع العوامل الأولية في أزواج أو ثلاثيات.

مثال ٦

أوجد قيمة كل مما يلي:

أ $\sqrt{512}$ ب $\sqrt[3]{324}$

الحل:

حلّ العدد الى عوامله الأولية ثم رتب العوامل من الأصغر الى الأكبر.
ستلاحظ أن كل عاملين أوليين مُتاليين متساويان. اكتب من كل زوج من العوامل عاملًا واحدًا فقط.

أوجد ناتج الجذر التربيعي بإيجاد ناتج ضرب العوامل الأولية التي تمأخذها.

أ $\sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2} = 324$

$$18 = 3 \times 3 \times 2$$

$$18 = \sqrt{324}$$

حل العدد إلى عوامله الأولية ثم ربّ العوامل من الأصغر إلى الأكبر. ستلاحظ أن كل ثلاثة عوامل أولية متتالية متساوية. اكتب من كل ثلاثة عوامل متساوية عاملًا واحدًا فقط. أوجد ناتج الجذر التكعيبي بایجاد ناتج ضرب العوامل الأولية التي تم أخذها.

$$\begin{array}{r} 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512 \\ \hline 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$8 = \sqrt[3]{512}$$

ب

إيجاد القوى والجذور باستخدام الآلة الحاسبة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتربيع الأعداد وتكعيبيها بسرعة، وذلك باستخدام المفاتيح x^2 و x^3 أو المفتاح \sqrt{x} . استخدم المفاتيح \checkmark أو $\sqrt[3]{x}$ لإيجاد الجذور. إذا لم تتوافر الآلة الحاسبة، يمكنك استخدام طريقة ناتج ضرب العوامل الأولية بعد تجميعها في أزواج أو ثلثيات لإيجاد الجذر التربيعي أو الجذر التكعيبي للعدد. والطريقتان مُبيّنتان في المثال التالي:

لا تحتوي جميع الآلات الحاسبة على المفاتيح نفسها. كل المفاتيح x^2 و x^3 و \sqrt{x} تعني نفسه في مختلف الآلات الحاسبة.

مثال ٧

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

٥١٢٣ د

٣٢٤٦ ج

٣٥ ب

٢١٣ أ

الحل:

$169 = x^2$ ٣ ١ أدخل

$169 = 213$ أ

أدخل $125 = x^3$ ، إن لم يكن المفتاح x^3 موجودًا،

$125 = 25$ ب

أدخل $125 = 3$ في هذا المفتاح، عليك

إدخال القوى.

$18 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{}$ أدخل

$18 = 324$ ج

$8 = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{}$ أدخل

$8 = 512$ د

قوى وجذور أخرى

لاحظت أن مربعات الأعداد مرفوعة جمّيعها إلى القوى ٢ (مربع $5 = 5 \times 5 = 25$) وأن مكعبات الأعداد مرفوعة جمّيعها إلى القوى ٣ (مكعب $5 = 5 \times 5 \times 5 = 125 = 5^3$). يمكنك أن ترفع أي عدد إلى أي قوى. مثلاً، $5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$ ، يُقراً ذلك في صورة: ٥ مرفوعة إلى القوى ٤، يُطبق المبدأ نفسه على إيجاد جذور الأعداد.

تأكد من أنك تعرف وظيفة المفتاح الذي تستخدمه في آلة الحاسبة، وأنك تعرف كيفية استخدامه. قد يكون لهذه المفاتيح، في بعض الآلات الحاسبة، وظائف أخرى.

$$5 = \sqrt[2]{25}$$

$$5 = \sqrt[3]{125}$$

$$5 = \sqrt[4]{625}$$

يمكنك استخدام آلة الحاسبة لتنفيذ عمليات حسابية تتضمن جذوراً ومربعات. يحسب المفتاح \sqrt{x} قيمة أي قوى.

لإيجاد 7^7 : أدخل ٧ \sqrt{x} ٥ ، لتحصل على النتيجة ١٦٨٠٧

يحسب المفتاح $\sqrt[x]{x}$ قيمة أي جذر.

لإيجاد قيمة $\sqrt[4]{81}$: أدخل ٨ $\sqrt[4]{x}$ ١ لتحصل على النتيجة ٣

للحصان

سوف نتعامل من جديد مع قوى وجذور أعلى عندما نتعامل مع الصيغة القياسية والأسس ومعدل النمو والتناقص.

تمارين ٣-١

(١) أوجد ناتج ما يلي:

- | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|
| ٢١ | ٢١٢ | ٢١١ | ٢٧ | ٢٣ |
| ٥ | ٥ | ٥ | ٥ | ٥ |
| هـ | دـ | جـ | بـ | أـ |
| ٢٨ | ٢٤ | ٢٠٠ | ٢٣٢ | ٢١٩ |
| يـ | طـ | حـ | زـ | وـ |

(٢) أوجد ناتج ما يلي:

- | | | | | |
|-----|----|-----|-----|----|
| ٣٩ | ٣٦ | ٣٤ | ٣٣ | ٣١ |
| ٥ | ٥ | ٥ | ٥ | ٥ |
| ٢٠٠ | ٣٠ | ٢٠٠ | ٢١٠ | ٢١ |
| يـ | طـ | حـ | زـ | أـ |

(٣) ضع قيمة لـ (س) لتصبح كل عبارة من العبارات الآتية صحيحة:

- | | | | |
|----|-----------------|----|-----------------|
| أـ | س × س = ٢٥ | جـ | س × س × س = ٨ |
| بـ | س × س × س = ٢٢٤ | هـ | س × س = ٧٢٩ |
| دـ | س × س × س = ٤٠٠ | زـ | س × س × س = ٢٢٥ |
| هـ | س × س × س = ١ | جـ | س × س = ٨٠٠٠ |
| وـ | س × س = ٨١ | بـ | س = ٩ |
| طـ | س × س = ٣٠ | كـ | ٦٧ = س |
| ذـ | س × س = ٢٠٠ | يـ | س = ٣٠ |
| لـ | س = ٣٠ | نـ | ٣٠ = ٣ |
| سـ | ٣٠ = س | مـ | ٣٠ = س |

درس مربعات كل الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٢٠ ضمنياً، لتصبح سريعاً في إيجادها. وعندما تحدد أنماط مربعات الأعداد تصبح قادرًا على حل مسائل في سياقات مختلفة.

(٤) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل جذر من الجذور الآتية:

- | | | | |
|-------|-------|------|----|
| ١٠٠٦ | ٤٦ | ٦٧ | ٩٧ |
| هـ | دـ | جـ | أـ |
| ١٧٦٤٦ | ١٢٩٦٦ | ٤٠٠٧ | ٧٦ |
| ١٠٠٠٦ | ٦٤٣ | ٢٧٦ | ٦٧ |
| ٥٨٣٢٦ | ١٧٢٨٦ | ٧٢٩٦ | ٤٦ |
| رـ | قـ | صـ | فـ |

(٥) أوجد الجذر التربيعي لكل مما يلي مستخدماً التحليل للعوامل الأولية المعطى. وضّح خطوات الحل.

$$5 \times 5 \times 3 \times 3 = 225 \quad \text{ب}$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 324 \quad \text{أ}$$

$$5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2025 \quad \text{د}$$

$$7 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 784 \quad \text{ج}$$

$$7 \times 7 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 19600 \quad \text{هـ}$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 250000 \quad \text{وـ}$$

(٦) أوجد الجذر التكعيبي لكل مما يلي مستخدماً التحليل للعوامل الأولية المعطى. وضّح خطوات الحل.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729 \quad \text{بـ}$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \quad \text{أـ}$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 1000 \quad \text{دـ}$$

$$13 \times 13 \times 13 = 2197 \quad \text{جـ}$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15625 \quad \text{هـ}$$

$$2 \times 2 = 32768 \quad \text{وـ}$$

(٧) أوجد ناتج كل مما يلي:

$$\overline{17} + \overline{97} \quad \text{دـ}$$

$$\overline{2325} \quad \text{جـ}$$

$$\overline{2641} \quad \text{بـ}$$

$$\overline{2491} \quad \text{أـ}$$

$$\overline{4} \times \overline{257} \quad \text{حـ}$$

$$\overline{41} \times \overline{257} \quad \text{زـ}$$

$$\overline{367} - \overline{107} \quad \text{وـ}$$

$$\overline{36} - \overline{107} \quad \text{هـ}$$

$$\overline{41} \times \overline{97} \quad \text{يـ}$$

$$\overline{4} \times \overline{97} \quad \text{طـ}$$

(٨) في كل مما يلي، أوجد طول ضلع مكعب حجمه:

$$\text{أـ } 1000 \text{ سم}^3 \quad \text{بـ } 19683 \text{ سم}^3 \quad \text{جـ } 68921 \text{ ملم}^3 \quad \text{دـ } 64000 \text{ سم}^3$$

(٩) أوجد قيمة كل مما يلي:

$$\overline{512}^3 + \overline{3}^3 \quad \text{جـ}$$

$$\overline{64}^3 \times \overline{0}^3 \quad \text{بـ}$$

$$\overline{2}^2 \times \overline{4}^2 \quad \text{أـ}$$

$$\overline{2}(\overline{512})^3 \div \overline{8}^3 \quad \text{وـ}$$

$$\overline{62} \times \overline{15625} \quad \text{هـ}$$

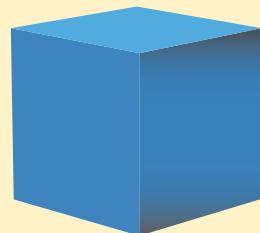
$$\overline{46656}^3 \times \overline{4}^2 \quad \text{دـ}$$

تعمل الأقواس عمل تجميع الرموز.
احسب ما في داخل الأقواس قبل القيام باحتساب ما في خارجها.
تعمل رموز الجذور بنفس طريقة عمل القوس. إذا كان لديك $\sqrt{9+25}$ ، فعليك جمع ٩ و ٢٥ قبل إيجاد قيمة الجذر.

(١٠) أيهما أكبر؟ ما الفرق بينهما؟

$$\text{بـ } \overline{15625}^3 \times \overline{729}^3 \text{ أمـ } \overline{63} \times \overline{4}^4$$

$$\text{أـ } 8 \times 4^4 \text{ أمـ } 4^3 \times 3^4$$



في المكعب، يتتساوى الطول والعرض والارتفاع.
صيغة حجم المكعب هي $H = S \times S \times S$ ، حيث H حجم المكعب، S طول ضلعه.

٤-١ الأعداد الموجّهة

٤-٤-١ تطبيقات على الأعداد الموجّهة



تُستخدم إشارة السالب لتدلّ على أن القيمة أقلّ من الصفر. وهي تُستخدم مثلاً في ميزان الحرارة، وفي كشوف حسابات البنوك، وفي المصاعد.

عندما تستخدم أعداداً للتعبير عن مواقف حياتية، مثل درجة الحرارة، والارتفاع، والعمق تحت مستوى سطح البحر، والربح والخسارة والاتجاهات (على الشبكة)، قد تحتاج أحياناً إلى استخدام إشارة السالب لتدلّ على اتجاه العدد. يمكنك مثلاً عرض درجة الحرارة ثلاثة درجات تحت الصفر في صورة -3°S . تُسمى الأعداد التي لها اتجاهات **أعداداً موجّهة**. فإذا كتبت نقطة تقع على ارتفاع 25m فوق مستوى سطح البحر في صورة $25^{\text{+}}\text{m}$ ، فإن النقطة التي تقع على ارتفاع 25m تحت مستوى سطح البحر تُكتب في صورة $25^{\text{-}}\text{m}$.

عندما يتم اختيار اتجاه ما موجباً، يكون الانّجاه المضاد له سالباً.

وعليه:

- إذا كان الانّجاه إلى الأعلى موجباً، يكون الانّجاه إلى الأسفل سالباً.
- إذا كان الانّجاه إلى اليمين موجباً، يكون الانّجاه إلى اليسار سالباً.
- إذا كان الانّجاه إلى الشمال موجباً، يكون الانّجاه إلى الجنوب سالباً.
- إذا كان ما فوق الصفر موجباً، فيكون ما تحت الصفر سالباً.

تمارين ٤-١

(١) عَبَرَ عن كُلَّ حالة من الحالات الآتية باستخدام عدد موجّه:

أ ربح 100 ريال عماني

ب 25 كم تحت مستوى سطح البحر

ج تراجع بمقدار 10 درجات

د زيادة كتلة بمقدار 2 كغم

هـ فقدان كتلة بمقدار 1.5 كغم

و 800 م فوق مستوى سطح البحر

ز درجة الحرارة 10°S تحت الصفر

ح هبوط بمقدار 24 م

ط دين مقداره 2000 ريال عماني

ي زيادة بمقدار 250 ريالاً عمانيّاً

ك الوقت ساعتان قبل توقيت جرينتش

ل ارتفاع مقداره 400 م

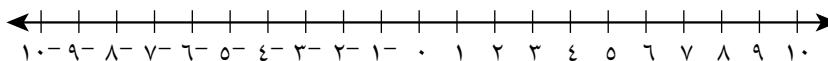
م رصيد في البنك قيمته 450 ريالاً عمانيّاً

١-٤-ب مقارنة الأعداد الموجّهة وترتيبها

الأعداد الموجّهة هي أعداد موجبة أو سالبة. يمكنك تمثيل مجموعة الأعداد الصحيحة على خط الأعداد، مثل المعرض أدناه.

لاحظاً

ستستخدم خطوط أعداد مشابهة عندما تحل مطالبات خطية لاحقاً.



أي عدد على اليمين يكون أكبر من أي عدد على اليسار

تمارين ١-٤-ب

(١) املأ الفراغ بأخذ الرمزيين < أو > لتكون العبارة صحيحة:

٣	<input type="square"/>	١٢	ج	٩	<input type="square"/>	٤	ب	٨	<input type="square"/>	٢	١
٤	<input type="square"/>	٢	و	٤	<input type="square"/>	٧	هـ	٤	<input type="square"/>	٦	د
٠	<input type="square"/>	٨	طـ	٢٠	<input type="square"/>	١٢	حـ	١١	<input type="square"/>	٢	زـ
٣	<input type="square"/>	٣٢	لـ	٤	<input type="square"/>	١٢	كـ	٢	<input type="square"/>	٢	يـ
٨٩	<input type="square"/>	١٢	سـ	١١	<input type="square"/>	٣	نـ	٣	<input type="square"/>	٠	مـ

من المهم أن تفهم كيف تتعامل مع الأعداد الموجّهة لوجود موضوعات عدّة مرتبطة بها.

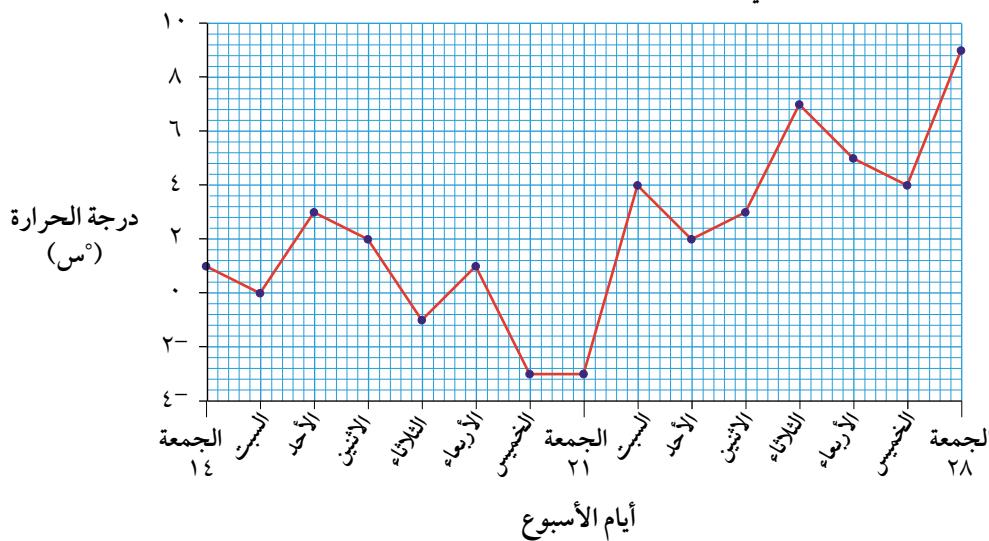
(٢) رتب مجموعات الأعداد التالية ترتيباً تصاعدياً:

- | | | | |
|----|------------------------|----|---------------------|
| بـ | ٨ـ، ٩ـ، ١٠ـ، ٤ـ، ٣ـ، ٤ | أـ | ١٢ـ، ٧ـ، ٨ـ |
| دـ | ٠ـ، ٩٠ـ، ٨٣ـ، ٥٠ـ، ٩٤ـ | جـ | ١٢ـ، ٥ـ، ٧ـ، ٧ـ، ٠ـ |

طبق مهاراتك

(٣) ادرس الرسم البياني لدرجة الحرارة:

التغيير في درجة الحرارة خلال أسبوعين من شهر يناير



أ كم بلغت درجة الحرارة يوم الجمعة في ١٤ يناير؟

ب كم انخفضت درجة الحرارة من يوم الجمعة في ١٤ يناير إلى يوم السبت في ١٥ يناير؟

ج ما أدنى درجة حرارة سُجّلت خلال الأسبوعين؟

د ما الفرق بين أعلى درجة حرارة وأدنى درجة حرارة خلال الأسبوعين؟

هـ كم تكون درجة الحرارة يوم السبت في ٢٩ يناير، إذا تغيرت درجة الحرارة في هذا اليوم بمقدار ٢ درجة مئوية عن اليوم السابق؟

٤ رصيد حمد في البنك ٤٥,٥٠٠ ريالاً عمانيّاً، أودع في حسابه ١٥,٠٠٠ ريالاً عمانيّاً،

ثم سحب ٣٢,٠٠٠ ريالاً عمانيّاً. كم ريالاً عمانيّاً أصبح في رصيد حمد في البنك؟

٥ انكشف رصيد سعيد في البنك ٤٢٠ ريالاً عمانيّاً.

أ مثل رصيد سعيد بعدد موجّه.

ب كم ريالاً عمانيّاً عليه أن يضع في البنك ليصبح رصيده ٥٠٠ ريال عماني؟

ج أودع سعيد ٢٠٠ ريال عماني. كم سيصبح رصيده الجديد؟

٦ ارتفع غطّاس موجود على عمق ٢٧ م تحت مستوى سطح الماء بمقدار ٦ م. عند أي

عمق أصبح الغطّاس؟

٧ في يوم بارد من الشتاء في مرتفعات الجبل الأخضر في سلطنة عُمان، كانت درجة

الحرارة -5° س عند الساعة ٦ صباحاً. ارتفعت درجة الحرارة بمقدار 8° س بعد

الظهر. وعند الساعة ٧ مساءً، انخفضت بمقدار 11° س عما كانت عليه بعد الظهر.

كم كانت درجة الحرارة عند الساعة ٧ مساءً؟

٨ يسبق التوقيت المحلي في مدينة مسقط توقيت جرينتش بمقدار أربع ساعات، ويتأخّر

التوقيت المحلي في مدينة ريو دي جانيرو عن توقيت جرينتش بمقدار ثلاثة ساعات:

أ عندما تكون الساعة في جرينتش ٤ مساءً، فكم تكون في مسقط؟

ب عندما تكون الساعة في جرينتش ٣ صباحاً، فكم تكون في ريو دي جانيرو؟

ج عندما تكون الساعة في ريو دي جانيرو ٣ مساءً، فكم تكون في مسقط؟

د عندما تكون الساعة ٨ صباحاً في مسقط، فكم تكون في ريو دي جانيرو؟

يسْمَى الفرق بين أعلى درجة حرارة وأدنى درجة حرارة مدى درجات الحرارة.

١-٥ ترتيب العمليات الحسابية

في هذا الدرس، يُتوقع أن تقوم بحسابات أكثر تعقيداً تتضمن أكثر من عملية حسابية واحدة (+، -، ×، ÷). عندما تُجري حسابات أكثر تعقيداً، ينبغي لك اتّباع سلسلة من القواعد الرياضية ترتبط بترتيب إجراء العمليات الحسابية. والقواعد التي تحكم ترتيب العمليات، هي:

- قم بإكمال عمليات رموز التجميع أولاً (الأسس والأقواس والجذور).
- قم بإجراء عملية الضرب والقسمة، مُبتدئاً من اليمين إلى اليسار.
- قم بإجراء عملية الجمع والطرح، مُبتدئاً من اليمين إلى اليسار.

يشير ترتيب العمليات إلى إجراء الأسس (القوى) بعد الأقواس، ولكن قبل جميع العمليات الحسابية الأخرى.

١-٥-١ رموز التجميع

أكثر رموز التجميع شيوعاً في الرياضيات هي الأقواس، وإليك بعض الأمثلة على أنواع الأقواس المختلفة المستخدمة في الرياضيات:

$$(4 + 6 \times 2) - [8 - (4 \times 2) - (6 + 2)]$$

عندما تتضمن العبارة الرياضية أكثر من مجموعة أقواس، نفذ العملية الحسابية في القوس الداخلي أولاً.

بعض الرموز الأخرى التي تُستخدم في تجميع العمليات هي:

- شرطة الكسر، مثل $\frac{12-5}{8-3}$
- الجذر التربيعي والجذر التكعبي، مثل $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[4]{27}$
- القوى، مثل 2^5 أو 4^2

مثال ٨

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $(4 + 3) \times 7 - [(3 - 4) \times 20]$ **ب** $(4 - 10) \times (4 + 6) - 45$ **ج** $45 - [1 \times 20] - 40$

الحل:

ج $45 - [1 \times 20] - 40 = 45 - 20 = 25$

ب $78 = 13 \times 6$

أ $49 = 7 \times 7$

مثال ٩

أوجد ناتج كل مما يلي:

$$\frac{36 - 100}{36} + \frac{4}{4 \div 36}$$

ج

$$\frac{28 + 4}{9 - 17}$$

ب

$$28 + 3$$

الحلّ:

$$\begin{aligned} & 36 - 100 \\ & \underline{- 64} \\ & \quad 16 \\ & \quad 8 + 3 \\ & \quad 11 = \end{aligned}$$

$$16 + 4 =$$

$$8 + 3 =$$

$$11 =$$

$$\begin{aligned} & 28 + 4 \\ & \underline{- 17} \\ & \quad 11 \\ & \quad 32 \\ & \quad 4 = \end{aligned}$$

ب

ب

$$\begin{aligned} & (8 \times 8) + 3 \\ & 64 + 3 = \\ & 67 = \end{aligned}$$

أ

تمارين ١-٥-١

(١) أوجد ناتج كل مما يلي، موضحاً خطوات الحل:

$$(9 + 2) \div (5 + 20) \quad \text{ج} \quad (5 + 20) \div 4 \quad \text{د} \quad 3 \times (7 + 4) \quad \text{أ}$$

$$(2 + 12) \div (5 \div 25) + 16 \quad \text{ز} \quad (5 \div 25) + 16 \quad \text{و} \quad 4 \times (7 + 4) \quad \text{ه}$$

$$(15 - 10) \times 15 \quad \text{ط} \quad (3 \div 33) \div 121 \quad \text{ك} \quad (16 + 4) \div 100 \quad \text{ي} \quad (4 - 12) \div 40 \quad \text{ط}$$

(٢) أوجد ناتج كل مما يلي:

$$(6 + 4) - (4 + 6) \quad \text{ج} \quad (3 + 6) \times (4 - 12) \quad \text{ب} \quad (7 - 16) \times (8 + 4) \quad \text{أ}$$

$$(20 - 27) \div (7 \times 6) \quad \text{و} \quad (3 \times 8) + (2 \times 4) \quad \text{ه} \quad (5 - 10) \div (17 + 23) \quad \text{د}$$

$$(3 + 4) \times (26 - 56) \quad \text{ط} \quad 25 \div (13 + 12) \quad \text{ح} \quad (4 \div 16) \div (85 - 105) \quad \text{ز}$$

(٣) أوجد ناتج كل مما يلي:

$$[(6 \times 2) - 2] + 6 \quad \text{ب} \quad [(5 - 8) - 12] + 4 \quad \text{أ}$$

$$[(2 + 6) - (12 + 4)] - 200 \quad \text{د} \quad [(8 + 2) - 60] + 8 \quad \text{ج}$$

$$10 \times [[(30 + 2) \times 5] + 6] \quad \text{و} \quad [[(8 + 2) \times 4] - 100] \times 200 \quad \text{ه}$$

$$[2 + (3 - 6) - (4 \div 20)] \times 6 \quad \text{ح} \quad 10 \times [(9 + 7) - (12 + 20)] \quad \text{ز}$$

$$[(6 + 3) \times 4 - (20 + 4) \times 6] - 1000 \quad \text{ط}$$

١-٥-ب قواعد ترتيب العمليات

لاحظاً

سوف تطبق قواعد ترتيب العمليات الحسابية على الكسور والكسور العشرية والعبارات الجبرية لاحقاً.

تمارين ١-٥-ب

(١) أوجد ناتج كل مما يأتي:

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| $3 \times 10 + 2$ ج | $(3 + 10) \times 5$ ب | $3 + 10 \times 5$ أ |
| $(3 + 2) \div 2 \times 6$ و | $2 \times 7 + 23$ هـ | $2 \times (10 + 2)$ دـ |
| $\frac{4 - 16}{2 - 4}$ طـ | $2 + 9 \div (1 + 17)$ حـ | $\frac{5 - 15}{5 \times 2}$ زـ |
| $8 \times 4 - 4 \times 12$ لـ | $2 \times (3 + 2) - 48$ كـ | $21 \times 3 + 17$ يـ |
| $2 \div 2 \times 4 - 10$ سـ | $3 + 3 \div 6 - 20$ نـ | $6 + 3 \div 30 + 15$ مـ |

(٢) أوجد ناتج العمليات الحسابية التالية:

- | | | |
|---|------------------------|--------------------------|
| $(5 - 6) \times 8 \div 24$ جـ | $(3 \div 21) - 14$ بـ | $3 - 2 \times 4 - 18$ أـ |
| $11 \div (3 \div 30) \times (3 + 8)$ وـ | $8 - 6 \div 36 + 5$ هـ | $4 - 3 - 6 \div 42$ دـ |

(٣) حدد فيما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

- | |
|---|
| $5 + (20 \times 4) + 1 = 5 + 20 \times (4 + 1)$ أـ |
| $3 \times 2 \div (4 \times 6) < 3 \times (2 + 4) \times 6$ بـ |
| $(2 \times 3) - 5 + 8 > 2 \times (3 - 5) + 8$ جـ |
| $100 \div 10 + 100 > 100 \div (10 + 100)$ دـ |

(٤) ضع كل عدد في المكان المناسب له لتكون جملة عدديّة صحيحة في كل مما يلي:

$$\square = \square \div \square - \square \quad 10, 5, 2, 0 \quad \text{أـ}$$

$$\square = \square \div \square - \square \quad 18, 13, 11, 9 \quad \text{بـ}$$

$$\square = \square - (\square - \square) \div \square \quad 16, 14, 8, 3, 1 \quad \text{جـ}$$

$$\square = (\square - \square) - (\square + \square) \quad 12, 9, 6, 5, 4 \quad \text{دـ}$$

(٥) أوجد ناتج كل مما يلي:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 42×8 جـ | $23 - 29$ بـ | $72 + 6$ أـ |
| $\frac{40 - 100}{4 \times 5}$ وـ | $\frac{10 - 21}{7 - 14}$ هـ | $2 \div 4 - 20$ دـ |
| | $\frac{7}{7 - 70}$ حـ | $\frac{8}{8 + 8}$ زـ |

(٦) ضع الأقواس في المكان المناسب لها لتكون العمليات الحسابية الآتية صحيحة:

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| $90 = 3 \times 10 - 40$ | $90 = 9 \times 10 - 25$ | $30 = 6 + 4 \times 3$ |
| ج | ب | أ |
| $150 = 15 \times 9 - 19$ | $2 = 5 \div 3 + 12$ | $10 = 2 \times 9 - 14$ |
| و | هـ | د |
| $45 = 2 + 7 \times 4 - 9$ | $66 = 9 - 15 \times 8 + 3$ | $5 = 2 - 6 \div 10 + 1$ |
| ز | حـ | طـ |
| $12 = 2 \div 6 - 15$ | $5 = 5 \times 3 + 3 \div 6$ | $30 = 5 \times 4 - 10$ |
| يـ | كـ | لـ |
| $6 = 3 - 3 \times 3 \div 36$ | $20 = 2 \times 3 - 5 + 8$ | $20 = 5 \div 20 \times 4 + 1$ |
| مـ | نـ | سـ |
| $24 = 2 + 8 \times 2 + 6$ | $11 = 1 + 4 \div 40$ | $1 = 6 \div 2 - 4 \times 3$ |
| صـ | فـ | عـ |

١-٥-ج استخدام الآلة الحاسبة

تطبق الآلة الحاسبة، التي تتضمن منطقاً جبرياً، قواعد ترتيب العمليات الحسابية آلياً. فإذا أدخلت $2 \times 3 + 4$ ، سوف تجري آلتكم الحاسبة عملية الضرب أولاً، وتعطيك الإجابة 14 (تحقق من أن آلتكم الحاسبة تقوم بذلك). عندما تتضمن الحسابات أقواساً، يجب إدخال الأقواس لتأكد من أن آلتكم الحاسبة تجري الحسابات على أقسام التجميع أولاً.

عندما سترسل آلتكم الحاسبة لإجراء العمليات الحسابية في الترتيب الصحيح، ستحتاج إلى تذكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية وتطبيقها بالصورة الصحيحة.

مثال ١٠

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كل مما يلي:

- أ) $9 \times 2 + 3$ ب) $4 \times (8 + 3)$ ج) $(1 + 5 \times 2) - (4 - 8 \times 3)$

الحل:

$=$ 9 \times 2 $+$ 3 أدخل	21 أ
$=$ 4 \times) 8 $+$ 3 (أدخل	44 بـ
-) 4 $-$ 8 \times 3 (أدخل	9 جـ
$=$) 1 $+$ 5 \times 2 (أدخل	

جرب القيام بعدة حسابات على آلتكم الحاسبة بوجود الأقواس ومن دونها. مثلاً: $6 + 2 \times 3$ و $3 \times (6+2)$. هل فهمت لماذا تختلف الإجابتان؟

قد تتضمن آلتكم الحاسبة نوعاً واحداً فقط من الأقواس () و () . إذا وجد نوعان مختلفان من أشكال الأقواس في آلتكم الحاسبة مثل $[4 \times (3-2)]$ ، أدخل رمز القوس لكل نوع.

تمارين ١-٥-ج

(١) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كل مما يلي:

- | | |
|----|----------------------------------|
| بـ | $2 \times 4 - 10$ |
| أ | $3 \times 4 - 12 \div 6 + 18$ |
| جـ | $10 - 5 \times 4 + 3$ |
| هـ | $2 \div 6 - 8 \times 3 - 5$ |
| زـ | $5 \div 20 \times (4 + 1)$ |
| طـ | $2 \times 6 - (8 + 8)$ |
| كـ | $6 \times (5 + 7) \div 24$ |
| يـ | $(3 - 4) \times 30 - 100$ |
| دـ | $2 + 3 - 5 \times 3 \div 18$ |
| وـ | $1 + 3 \div 3 + 7$ |
| حـ | $(3 - 2) \times 6 \div 36$ |
| صـ | $2 \times [43 - 53] - (40 - 60)$ |

تتضمن بعض الآلات الحاسبة مفتاحين: هما $-$ و $(-)$. الأول يعني طرح عدد من آخر. الثاني يعني "إشارة العدد سالبة". جرب المفتاحين لتأكد من أن آلتكم الحاسبة تنفذ ما تتوقع منها أن تفعله.

٣ $\times [16 + 4] \div 100]$ ن

$4 \times [9 \div (6 + 12)]$ م

$[7 - 12] \div 25 \times 4$ س

(٢) استخدم الآلة الحاسبة لتحقق من صحة الإجابات التالية. إذا كانت الإجابة خطأ، اكتب الإجابة الصحيحة:

١٢٤ = ٧٦ + ٤ × ١٢ أ

٦٩٨ = ٨ × ٧٥ + ٨ ب

١٢٤ = ٢٣ × ٤ - ١٨ × ١٢ ج

٧٦ = (٤ × ٣ + ٧) × (٤ ÷ ١٦) د

١٦ = (٦ + ٢) × (٣٦ - ٨٢) هـ

١٢ = (٢ ÷ ٦ + ٤) - (٤ - ٧ × ٣) و

(٣) ضع في المربع العمليّة الحسابيّة المُناسبة لتكوين العبارات الرياضيّة التالية

صحيحة:

٤ = ٨ □ ١٠ □ ٨٤ ب

٣ = (٢٤ □ ٢٨) □ ١٢ أ

١١ = ١١ □ ٢٢ □ ١١ □ ٢٣ د

١٧ = (١,٣ □ ٠,٧) ٧ □ ٣ ج

١٢ = (٢ □ ٣) □ ١٥ □ ٩ و

٤ = (٥ □ ٧) □ ٥ □ ٤٠ هـ

كلما كنت ماهراً في استخدام الآلة الحاسبة، كانت حساباتك أسرع وأكثر دقة.

(٤) أوجد ناتج كل مما يلي باستخدام الآلة الحاسبة:

$\frac{47 \times 25}{12 - 26 + 1}$ ب

$\frac{167 \times 7}{1 - 7 + 2}$ أ

$\frac{11 - 26}{(4 + 2) \times 17}$ د

$\frac{3 + 2}{257 - 10 \times 4 + 5}$ ج

$\frac{6 + 5 - 23}{5 \times 37}$ و

$\frac{3 - 23}{817 \times 2}$ هـ

$\frac{[24 + (12 - 3) \div 18] + 30 -}{23 - 8 - 5}$ ح

$\frac{167 \times 3 - 36}{3 \div 23 - 10}$ ز

للحما

عندما تعلم بالأسس والصيغة القياسيّة لاحقاً، يلزمك تطبيق هذه المهارات. وسوف تستخدم آليّة الحاسبة بفاعلية لحلّ مسائل تتضمّن قوى وجذوراً.

٥) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كل مما يلي:

$$\frac{0,0378 \times 12,32}{8,05 + 17} \quad \text{ب}$$

$$\frac{0,087 \times 19,23}{21,03 - 22,45} \quad \text{د}$$

$$\frac{0,345}{7 \times 4,2 + 1,34} \quad \text{أ}$$

$$\frac{0,087 + 17}{5,098 - 2} \quad \text{ج}$$

٦) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يلي:

$$\sqrt{6 \times 23 \times 21} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{36 - 24} \quad \text{د}$$

$$\sqrt{20,13 - 21,45} \quad \text{و}$$

$$\sqrt{21,7 \times \frac{1}{2} - 22,75} \quad \text{ح}$$

$$\sqrt{125 \times 64} \quad \text{أ}$$

$$\sqrt{219 + 28} \quad \text{ج}$$

$$\sqrt{21,17 - 22,3} \quad \text{هـ}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \quad \text{ز}$$

مُلْخَص

ما يجب أن تعرفه:

يجب أن تكون قادرًا على:

- تحديد الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة والأعداد الأولية.
- إيجاد مضاعفات وعوامل الأعداد وتحديد المُضاعف المُشتَرك الأصغر ($m \text{ m}$ ص) والعامل المُشتَرك الأكبر ($u \text{ m k}$).
- كتابة العدد في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية باستخدام مُخطّط الشجرة والقسمة.
- حساب المُربيعات والجذور التربيعيّة والمُكعبات والجذور التكعيبيّة لأعداد مُعطاة.
- التعامل مع الأعداد الصحيحة في مسائل من واقع الحياة اليومية.
- تطبيق القواعد الأساسية لإجراء العمليات الحسابية على الأعداد.
- إجراء عمليات حسابية أساسية ذهنياً وباستخدام الآلة الحاسبة.

- يمكن تصنيف الأعداد إلى أنواع مختلفة مثل أعداد طبيعية وأعداد صحيحة.
- عندما تضرب عدداً صحيحاً في نفسه تحصل على عدد مُربع (s^2). إذا ضربته مرة ثانية في نفسه تحصل على عدد مُكعب (s^3).
- العدد الذي تضربه في نفسه لتحصل على عدد مُربع يُسمى الجذر التربيعي. والعدد الذي تضربه في نفسه، ثم تضرب الناتج في العدد الأصلي مرة أخرى لتحصل على عدد مُكعب يُسمى الجذر التكعيبي. رمز الجذر التربيعي هو $\sqrt{}$ ، ورمز الجذر التكعيبي هو $\sqrt[3]{}$.
- يتم الحصول على مُضاعف العدد عند ضرب العدد في عدد طبيعي. المُضاعف المُشتَرك الأصغر ($m \text{ m}$ ص) لعددين أو أكثر هو أصغر مُضاعف مُشتَرك بين كل مجموعات المُضاعفات.
- عامل العدد يقسمه بدون باق. العامل المُشتَرك الأكبر ($u \text{ m k}$) لعددين أو أكثر، هو أكبر عامل مُشتَرك بين مجموعات العوامل.
- العدد الأولي له عاملان فقط، هما: العدد 1 والعدد نفسه. العدد 1 ليس عدداً أولياً وليس عدد غير أولي.
- العامل الأولي هو عدد أولي وعامل معاً.
- يمكن التعبير عن جميع الأعداد الطبيعية غير الأولية في صورة ناتج ضرب عواملها الأولية.
- تُسمى الأعداد الصحيحة أيضاً أعداداً مُوجّهة. تدل إشارة العدد الصحيح (- أو +) على أن قيمته أكبر من الصفر أو أصغر من الصفر.
- يطبق الرياضيون مجموعة معيارية من القواعد ليقرّروا الترتيب الذي تُجرى فيه العمليات الحسابية. العمليات في رموز التجميع تُجرى أولاً، إليها الضرب والقسمة، ثم الجمع والطرح.

تمارين نهاية الوحدة

١) انظر إلى مجموعة الأعداد الآتية: $\{-4, -1, 0, 3, 4, 6, 9, 15, 16, 19, 20\}$ أي من هذه الأعداد:

- أ **أعداد طبيعية؟**
- ب **مُربّعات أعداد؟**
- ج **أعداد صحيحة سالبة؟**
- د **أعداد أولية؟**
- ه **من مضاعفات العدد ٦٢ و ٥٨٠ من عوامل العدد**

٢) اكتب كل عوامل العدد ١٢

ب اكتب كل عوامل العدد ٢٤

ج أوجد العامل المشترك الأكبر (ع م ك) للعددين ١٢ و ٢٤

٣) أوجد العامل المشترك الأكبر (ع م ك) للعددين ٦٤ و ١٤٤

٤) اكتب أول خمسة مضاعفات لكل من الأعداد الآتية:

د ٨٠ ج ٣٠ ب ١٨ أ ١٢

٥) أوجد المضاعف المشترك الأصغر (م م ص) للعددين ٢٤ و ٣٦

٦) اكتب جميع الأعداد الأولية الواقعة بين ٠ و ٤٠

٧) استخدم شجرة العوامل لكتابه العدد ٤٠٠ في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية.

ب استخدم طريقة القسمة لكتابه العدد ١٠٨٠ في صورة ناتج ضرب عوامله الأولية.

ج استخدم التحليل للأعداد السابقة لإيجاد ما يلي:

(١) المضاعف المشترك الأصغر (م م ص) للعددين ٤٠٠ و ١٠٨٠

(٢) العامل المشترك الأكبر (ع م ك) للعددين ٤٠٠ و ١٠٨٠

ج $\sqrt{4080}$

(٤) هل العدد ١٠٨٠ عدد مكعب؟ فسر إجابتك.

٨) احسب:

ب $^{34}226$ أ 34

٩) ما أصغر عدد أكبر من ١٠٠ ويقبل القسمة:

ج على ٦٤ ب على ٦٠ أ على ٦٢

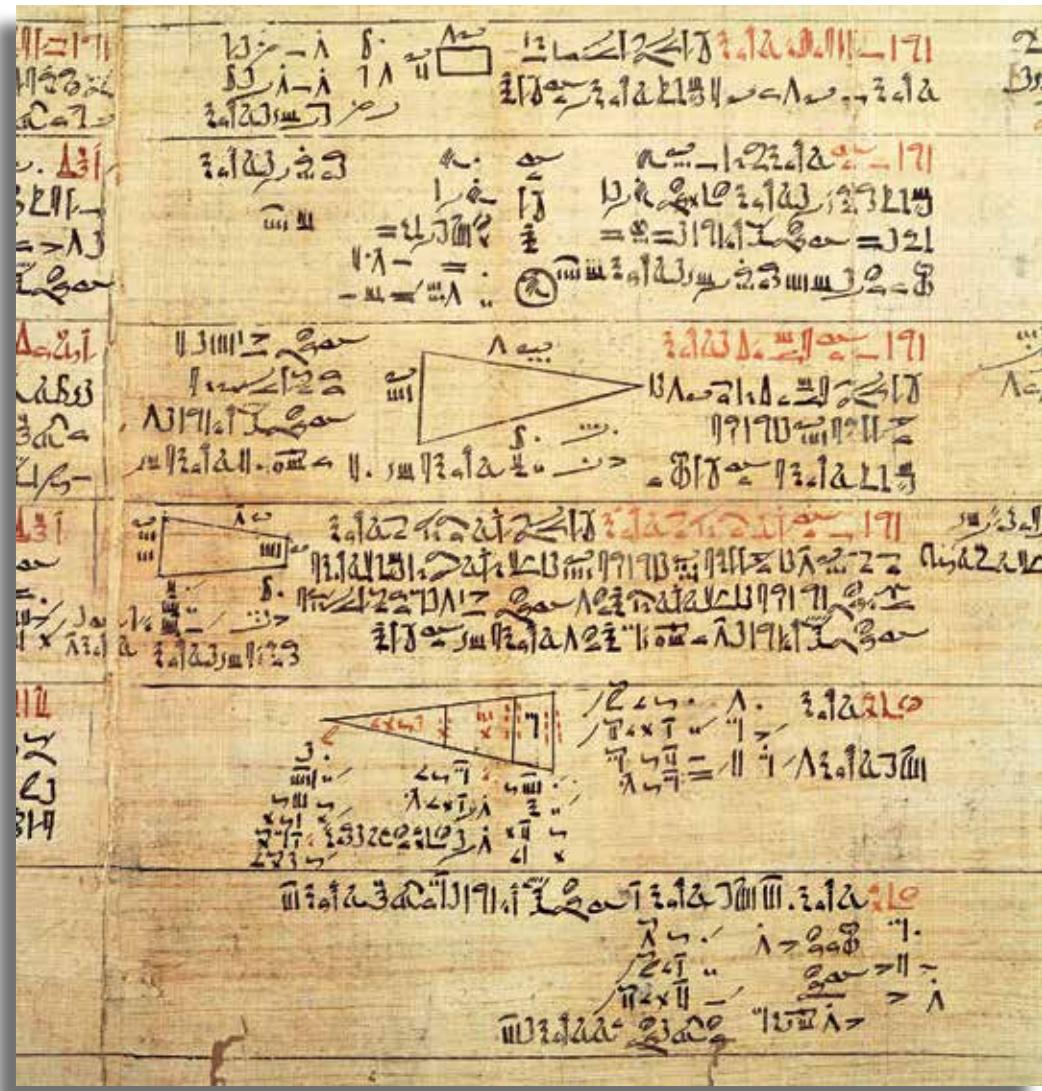
١٠) في صباح أحد الأيام، كانت درجة الحرارة 4°C . وفي منتصف الليل، انخفضت 8°C س عمّا كانت عليه في الصباح. كم أصبحت درجة الحرارة في منتصف الليل؟

١١) أوجد ناتج كل مما يلي:

ج $6 - (2 \times 3 - 15) + 2 \times (6 + 5) = 4 \times (100 - 15)$ ب $5 \times 4 + 2 \times 6$ أ $14 = 2 \times 1 - 4 + 7$

١٢) ضع أقواسًا على الجملة الرياضية لتصبح صحيحة. $14 \div 4 - 2 \times 1 = 7 + 14 \div 4 - 2 \times 1 = 14$

الوحدة الثانية: الكسور والنسب المئوية



تعد الوثيقة أعلاه مثالاً من أقدم الأمثلة على الوثائق الرياضية التي كتبها المصريون القدماء على ورق البردي. ويُعتقد أن هذه الوثيقة كُتبت بين العامين ١٧٠٠ و ١٦٠٠ قبل الميلاد زمن الفرعون أحمس، رغم أنها قد تكون نسخة عن وثيقة أقدم. يتحدث القسم الأول من الوثيقة عن الكسور. لا تقتصر فائدة الكسور على تحسين مهاراتك الحسابية، بل غالباً ما تستخدمها في الحياة اليومية من دون أن تدرك ذلك. مثلاً: كم كيلومتراً تقطع سيارتك إذا كان خزان الوقود يشير إلى النصف؟ إذا كانت حصتك ثلثي قرص بيتزا، فهل تبقى جائعاً؟ إذا قطعت ثلاثة أخماس المسافة في رحلتك، فكم تبلغ المسافة المتبقية التي عليك أن تقطعها في الرحلة؟ تحتاج الأم إلى المقادير الصحيحة لتحضير وجبة الغداء للعائلة.

المفردات

- الكسر Fraction
- الكسرا العتيادي Vulgar fraction
- الكسرا غير العتيادي Improper fraction
- البسط Numerator
- المقام Denominator
- الكسرا المكافئ Equivalent fraction
- أبسط صورة Simplest form
- العدد الكسري Mixed number
- المقام المشترك Common denominator
- المقلوب Reciprocal
- النسبة المئوية Percentage
- الصيغة العلمية Scientific notation
- العدد النسبي Rational number
- العدد العشري المنتهي Terminating decimal
- العدد العشري الدوري Recurring decimal

سوف تتعلم في هذه الوحدة:

- كيف:
- تجد كسوراً مُكافئة.
 - تبسيط الكسور.
 - تجمع وتطرح وتضرب وتقسم الكسور والأعداد الكسرية.
 - تجد كسور الأعداد.
 - تجد عدداً في صورة نسبة مئوية من عدد آخر.
 - تجد النسبة المئوية لعدد ما.
 - تعامل مع الصيغة العلمية.
 - تكتب الأعداد العشرية الدورية في صورة كسور اعتيادية.



يجب أن تكون مفاهيم الكسور الآتية مألوفة لديك:

الكسور المتكافئة

لإيجاد كسور متكافئة نضرب أو نقسم كلًّا من البسط والمقام على عدد لا يُساوي الصفر.

$$\text{الكسران } \frac{1}{2}, \frac{4}{8} \text{ متكافئان}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \times \frac{4}{4}$$

$$\text{الكسران } \frac{4}{5}, \frac{1}{10} \text{ متكافئان}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{10} \div \frac{4}{4}$$

لتبسيط كسرًا أقسم البسط والمقام على عدد لا يُساوي الصفر (هذا العدد يُمثل العامل المشترك الأكبر للبسط والمقام).

$$\frac{9}{20} = \frac{2 \div 18}{2 \div 40} = \frac{18}{40}$$

الأعداد الكسرية

حول بين الأعداد الكسرية والكسور غير الاعتيادية.

$$\frac{25}{7} = \frac{4 + (7 \times 3)}{7} = \frac{34}{7}$$

العمليات على الكسور

عند جمع الكسور أو طرحها، تأكَّد من أن لها المقام نفسه.

$$\frac{1}{24} + \frac{5}{24} = \frac{29}{24} = \frac{8 + 21}{24} = \frac{1}{3} + \frac{7}{8}$$

عند ضرب كسرَين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام. ثم اكتب الناتج في أبسط صورة.

$$\frac{12}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ من } 12$$

$$\frac{9}{32} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{8}$$

$$\frac{26}{8} =$$

$$\frac{1}{4} =$$

لتقسام على كسر، اضرب في مقلوبه.

$$\frac{4}{5} \div \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \div \frac{5}{1} = 36$$

النسبة المئوية

الرمز % يعني 'بالمائة'.

يمكن أن تكتب النسبة المئوية في صورة كسر أو كسر عشري.

$$\frac{9}{20} = \% 45$$

$$0.45 = \% 45$$

العمليات على النسب المئوية

لإيجاد نسبة مئوية من مقدار:

استخدم الكسور واحتصر

$$= 60 \% 25$$

$$15 = 0 \ 6 \times \% 5 \ 2$$

$$15 = 60 \times 0.25$$

$$15 = \frac{15}{1} \times \frac{25}{100}$$

سابقاً

قبل البدء بقراءة القسم الآتي من الوحدة، راجع العامل المشترك الأكبر (ع م ك) من الوحدة ١ ▶

الكسر هو جزء من الكل. تكتب الكسور في صورة $\frac{ج}{ب}$. العدد العلوي **ج**: حيث يمكن أن يكون أيّ عدد ويُسمى البسط. أما العدد السفلي **ج** فيُمكن أن يكون أيّ عدد عدا الصفر، ويُسمى **المقام**. يفصل بين البسط والمقام خط أفقِي.

إذا ضربت أو قسمت البسط والمقام على العدد نفسه، يبقى الكسر الجديد مُمثلاً للمقدار نفسه من الكل كما هو الكسر الأصلي. يُعرف الكسر الجديد على أنه **الكسر المكافئ**.

$$\text{مثال، } \frac{5}{7} = \frac{5 \div 5}{7 \div 5} = \frac{1}{1} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{8}{12}, \frac{25}{5} = \frac{25 \div 5}{5 \div 5} = \frac{5}{1}$$

لاحظ أن الكسر الأصلي $(\frac{25}{5})$ قد أصبح بعد القسمة على ٥ يساوي $(\frac{5}{1})$ ولا يوجد بين البسط والمقام عامل مشترك غير العدد ١، ولا حظ أنه من غير الممكن تقسيم الكسر أكثر من ذلك. ويعتبر الكسر الآن في أبسط صورة.

يكون الكسر اعتيادياً إذا كان البسط أصغر من المقام.
يكون الكسر غير اعتيادي إذا كان البسط أكبر من المقام أو يساويه.

مثال ١

اكتب كلاً من الكسور الآتية في أبسط صورة ممكناً:

$$\text{أ } \frac{3}{15} \quad \text{ب } \frac{16}{24} \quad \text{ج } \frac{21}{28} \quad \text{د } \frac{5}{8}$$

الحل:

$$\text{أ } \frac{1}{5} = \frac{3 \div 3}{15 \div 15} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ب } \frac{2}{3} = \frac{8 \div 8}{16 \div 24} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ج } \frac{3}{4} = \frac{7 \div 7}{21 \div 28} = \frac{1}{4}$$

د $\frac{5}{8}$ في أبسط صورة (عامل المشترك الأكبر للعددين ٥، ٨ هو ١).

لاحظ أنك تقسم، في كلّ حالة، كلاً من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (ع م ك) لهما.

مثال ٢

أيّ كسرَين من الكسور الآتية $\frac{5}{6}$, $\frac{20}{25}$, $\frac{15}{18}$ متكافئان؟

الحل:

$\frac{5}{6}$ في أبسط صورة.

$$\frac{4}{5} = \frac{5 \div 5}{20 \div 25} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{3 \div 3}{15 \div 18} = \frac{1}{3}$$

∴ الكسران $\frac{5}{6}$, $\frac{15}{18}$ متكافئان.

كان بإمكانك أن تكتب:

$$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$$

تسمى هذه العملية اختصار الكسور وهي طريقة مختصرة للتوضيح ما قمت به.

تمارين ١-٢

(١) أوجد ثلاثة كسور مكافئة لكل كسر من الكسور الآتية، وذلك بضرب أو قسمة كل من البسط والمقام على العدد نفسه:

$$\frac{11}{128} \quad \text{هـ} \quad \frac{18}{36} \quad \text{دـ} \quad \frac{12}{18} \quad \text{جـ} \quad \frac{2}{7} \quad \text{بـ} \quad \frac{5}{9} \quad \text{أـ}$$

(٢) اكتب كل كسر من الكسور الآتية في أبسط صورة:

$$\frac{108}{360} \quad \text{زـ} \quad \frac{24}{36} \quad \text{وـ} \quad \frac{500}{2500} \quad \text{هـ} \quad \frac{15}{25} \quad \text{دـ} \quad \frac{9}{12} \quad \text{جـ} \quad \frac{3}{9} \quad \text{بـ} \quad \frac{7}{21} \quad \text{أـ}$$

٢-٢ العمليات على الكسور

جمع الكسور وطرحها

يمكنك جمع الكسور وطرحها عندما يكون لها المقام نفسه.
يُسمى هذا **بالمقام المشترك**. يجب أن تستخدم ما تعرفه عن الكسور المكافئة ليساعدك على أن يكون للكسر المقام المشترك نفسه.
يُبيّن المثال الآتي كيف تستخدم المضاعف المشترك الأصغر (م م ص) لكلا المقامين في صورة مقام مشترك.

| سابقًا

ستحتاج في هذا الدرس من الوحدة إلى استخدام المضاعف المشترك الأصغر (م م ص). لقد تعاملت مع (م م ص) في الوحدة ١ ►

مثال ٢

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\text{جـ} \quad 1\frac{5}{7} - 2\frac{3}{4} \quad \text{بـ} \quad \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \quad \text{أـ} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

الحل:

أوجد المقام المشترك.

م م ص للعددين ٢، ٤ هو ٤؛ استخدمه مقامًا مشتركًا وأوجد الكسرتين المكافئتين.

اجمع البسطين.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$$

$$\frac{3}{4} =$$

لاحظ أنك عند إيجاد المقام المشترك، تجمع البسطين فقط ولا تجمع المقامين!

أوجد المقام المشترك.

م م ص للعددين ٤، ٦ هو ١٢؛ استخدمه مقامًا مشتركًا وأوجد الكسرتين المكافئتين.

اجمع البسطين.

حول الكسر غير الاعتيادي إلى عدد كسري.

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{10}{12} + \frac{9}{12} =$$

$$\frac{19}{12} =$$

$$1\frac{7}{12} =$$

قد تجد أحياناً أن مجموع كسررين اعتياديين هو كسر غير اعتيادي (بسطه أكبر من مقامه). وأنت في العادة تعيد كتابة هذا الكسر في صورة عدد كسري.

حوال العددين الكسريين إلى كسررين غير اعتياديَّين لسهولة التعامل معهما.

(م ص) للعددين ٤، ٧ هو ٢٨؛ وهو المقام المشترك. أوجد الكسررين المكافئين.

اطرح أحد البسطين من الآخر.

حوال الكسر غير الاعتيادي إلى عدد كسري.

$$\text{ج} \quad \frac{1}{7} - \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{28} - \frac{7}{28}$$

$$= \frac{4}{28} - \frac{7}{28}$$

$$= \frac{29}{28}$$

$$= 1\frac{1}{28}$$

تطبق خطوات جمع الكسور نفسها على طرها.

ضرب الكسور

عند ضرب كسررين أو أكثر، يمكنك ببساطة ضرب قيم البسط، ثم ضرب قيم المقام. قد تحتاج أحياناً إلى تبسيط الناتج. يمكن أن تكون العملية أسرع إذا قمت بالاختصار أولاً قبل إجراء عملية الضرب.

مثال ٤

أوجد ناتج كلَّ مما يلي:

ج) $\frac{3}{8}$ من $\frac{1}{2}$

ب) $3 \times \frac{5}{7}$

أ) $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4}$

الحل:

اضرب البسطين لتحصل على قيمة البسط الجديد. كرر الشيء نفسه مع المقامين. ثم اكتب الكسر في أبسط صورة.

اقسم مقام الكسر الأول وبسط الكسر الثاني على العدد ٢

لا يوجد عامل مشترك بين العددين ١٥، ٧ غير العدد ١؛ لذا فإن الكسر في أبسط صورة.

أ) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{2 \times 3}{7 \times 4} = \frac{2}{14}$

لاحظ أنك تستطيع أيضاً أن تختصر قبل إجراء عملية الضرب:

~~$\frac{3}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 3}{7 \times 2} = \frac{3}{14}$~~

لضرب كسرًا في عدد صحيح، اضرب البسط فقط في العدد الصحيح. مثلاً

$$\frac{15}{7} = 3 \times \frac{5}{7}$$

هنا لديك عدد كسري $(\frac{1}{2})$ تحتاج إلى تحويله إلى كسر غير اعتيادي، وهو كسر بسطه أكبر من مقامه. يساعدك ذلك على إتمام عملية الضرب.

ج) $\frac{3}{8}$ من $\frac{1}{2}$

$$\frac{27}{16} = \frac{9}{4} \times \frac{3}{8} = 4\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

لاحظ أن الحرف ‘من’، تم استبداله بإشارة الضرب ×

قسمة الكسور

لاحظاً

قبل وصف كيفية إجراء عملية قسمة كسررين، ينبغي التعرف إلى **المقلوب**، حيث يمكن الحصول على مقلوب أي كسر بتبديل البسط والمقام.

$$\text{مقلوب } \frac{3}{4} \text{ هو } \frac{4}{3} \text{ و مقلوب } \frac{7}{2} \text{ هو } \frac{2}{7}$$

لاحظاً ستتعامل مع ضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور مراتين عند التعامل مع المقادير الجبرية.

$$\text{وأيضاً مقلوب } \frac{1}{2} \text{ هو } \frac{2}{1} \text{ أو } 2 \text{ فقط و مقلوب } 5 \text{ هو } \frac{1}{5}$$

ناتج ضرب أيّ كسر في مقلوبه هو العدد 1 . مثلاً:

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{8} \times \frac{3}{3} = 1,$$

لتقسام كسرًا على كسر آخر، اضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني.
انظر إلى القاعدة التالية:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

مثال ٥

أوجد ناتج كل مما يأتي:

أ) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ ب) $2\frac{1}{3} \div 1\frac{3}{4}$ ج) $2 \div \frac{5}{8}$ د) $3 \div \frac{6}{7}$

الحل:

اضرب في مقلوب الكسر $\frac{1}{2}$ ؛ استخدم قوانين ضرب الكسور التي تعلمتها.

أ) $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

حول العدد الكسري إلى كسر غير اعتيادي.
اضرب في مقلوب $\frac{7}{4}$

ب) $\frac{7}{3} \div \frac{7}{4} = 2\frac{1}{3} \div 1\frac{3}{4}$
 $\frac{3}{1} \times \frac{4}{7} =$
 $\frac{3}{4} =$

اكتب 2 في صورة كسر غير اعتيادي.
اضرب في مقلوب $\frac{1}{2}$

ج) $\frac{2}{1} \div \frac{5}{8} = 2 \div \frac{5}{8}$
 $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} =$
 $\frac{5}{16} =$

اضرب في مقلوب $\frac{3}{1}$

د) $\frac{1}{2} \times \frac{7}{3} = 3 \div \frac{6}{7}$
 $\frac{2}{7} =$

لتقسام كسرًا على عدد صحيح غير الصفر، تستطيع إما أن تضرب المقام في العدد الصحيح، أو أن تقسم البسط على العدد الصحيح نفسه.

الكسور التي تتضمن أعداداً عشرية

ستجد أحياناً أن البسط أو المقام أو كليهما عدداً عشرياً! لتعبر عن تلك الكسور في أبسط صورة، تحتاج إلى:

- التأكد من أن كلاً من البسط والمقام قد أصبح عدداً صحيحاً، وذلك بإيجاد كسر مكافئ للكسر المعطى.
- التتحقق من أن الكسر المكافئ في أبسط صورة.

مثال ٦

بسط كلاً من الكسور الآتية:

ج $\frac{36}{0,12}$

ب $\frac{1,3}{2,4}$

أ $\frac{0,1}{3}$

الحلّ:

اضرب $0,1$ في 10 لتحول $0,1$ إلى عدد صحيح. للتأكد من أن الكسر الناتج مكافئ للكسر الأصلي، تحتاج إلى ضرب كل من البسط والمقام في العدد نفسه، لذا اضرب كذلك المقام 3 في 10 .

$$\text{أ } \frac{1}{3} = \frac{10 \times 0,1}{10 \times 3} = \frac{0,1}{3}$$

اضرب كلاً من البسط والمقام في 10 لتحصل على عددين صحيحين. لا يوجد (ع م ك) بين العددين 13 ، 24 غير العدد 1 ؛ لذا لا يمكن تبسيطهما.

$$\text{ب } \frac{13}{24} = \frac{10 \times 1,3}{10 \times 2,4} = \frac{1,3}{2,4}$$

اضرب $0,12$ في 100 لتحصل على عدد صحيح. تذكر أن تضرب البسط أيضاً في 100 ، فيكون الكسر الناتج مكافئ للكسر الأصلي. يمكن تبسيط الكسر النهائي بالاختصار.

$$\text{ج } 300 = \frac{3600}{12} = \frac{100 \times 36}{100 \times 0,12} = \frac{36}{0,12}$$

العديد من العمليّات على الكسور

يمكنك استخدام الكسور لتساعدك في حل المسائل.

تذكّر مثلاً أن $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$; ورغم أنها تبدو بديهية، فهي تساعدك في حل المسائل بسهولة.

مثال ٧

مدرسة بها ٦٠٠ طالب، إذا كان $\frac{2}{5}$ من طلاب المدرسة هم في الصفين ٩، ١٠، فكم طالباً في الصفين التاسع والعشر؟

الحل:

$$\frac{2}{5} \text{ من } 600 = 600 \times \frac{2}{5} = \frac{1200}{5} = 240 \text{ طالباً في الصفين ٩، ١٠.}$$

تذكّر في مثال ٤ الجزئية ج، أنك استبدلت 'من' بالإشارة ×.

مثال ٨

افترض الآن أن $\frac{2}{5}$ من طلاب مدرسة أخرى في الحلقة الأولى. وأن عددهم ٣٦٠ طالباً. ما إجمالي عدد الطلاب في المدرسة؟

الحل:

$$\frac{2}{5} \text{ من العدد الكلي هو } 360, \text{ أي إن } \frac{1}{5} \text{ العدد الكلي هو } 180; \text{ هذا يعني أن } \frac{5}{5} \text{ من العدد الكلي لطلاب المدرسة هو } 180 \times 5 = 900 \text{ طالب.}$$

تمارين ٢-٢

(١) أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad \text{ج}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{8} \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \text{أ}$$

$$3\frac{1}{6} - 5\frac{1}{8} \quad \text{و}$$

$$1\frac{3}{4} - 2\frac{5}{8} \quad \text{هـ}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{3} \quad \text{دـ}$$

$$4\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} \quad \text{طـ}$$

$$7\frac{1}{4} - 11 \quad \text{حـ}$$

$$\frac{2}{3} - 4 \quad \text{زـ}$$

$$4\frac{1}{5} + 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} \quad \text{لـ}$$

$$4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{16} - 5\frac{1}{8} \quad \text{كـ}$$

$$4\frac{3}{8} + 3\frac{1}{16} + 5\frac{1}{4} \quad \text{يـ}$$

(٢) أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{4} \quad \text{جـ}$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \quad \text{بـ}$$

$$\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} \quad \text{أـ}$$

$$7\frac{1}{4} \times 5\frac{1}{2} \quad \text{وـ}$$

$$24 \times 1\frac{1}{3} \quad \text{هـ}$$

$$\frac{256}{500} \times \frac{50}{128} \quad \text{دـ}$$

$$7 \div \frac{4}{9} \quad \text{طـ}$$

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} \quad \text{حـ}$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{7} \quad \text{زـ}$$

$$3\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{4} \quad \text{لـ}$$

$$5\frac{1}{12} \div 7\frac{7}{8} \quad \text{كـ}$$

$$\frac{1}{7} \div 4\frac{1}{5} \quad \text{يـ}$$

$$1\frac{1}{3} \div 1\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3} \quad \text{نـ}$$

$$1\frac{1}{3} \div (1\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3}) \quad \text{مـ}$$

تذكّر أن أيّ كسر يحتوي على عدد عشري في بسطه أو مقامه لا يعتبر في أبسط صورة.

ما الكسر المستخدم لتمثيل $40\frac{3}{7}$ ؟

(٣) أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

ج $\frac{7}{14}$	ب $\frac{4}{5}$	أ $\frac{3}{12}$
$\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}$	$\frac{5}{4} \times \frac{1}{5}$	$\frac{12}{3} \times \frac{1}{4}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$

(٤) يحتوي صندوق على أشكال هندسية بلاستيكية. $\frac{3}{8}$ من الأشكال زرقاء، $\frac{2}{7}$ من الأشكال مثلثة.

أ إذا كان $\frac{4}{9}$ من الأشكال الزرقاء مربعة، فما الكسر الذي يمثل المربعات الزرقاء بالنسبة إلى جميع الأشكال؟

ب إذا كان $\frac{1}{2}$ من المثلثات خضراء، فما الكسر الذي يمثل المثلثات الخضراء بالنسبة إلى جميع الأشكال؟

ج أيهما أكثر في الصندوق: المربعات الزرقاء أم المثلثات الخضراء؟

(٥) اشتري $\frac{3}{4}$ من الأشخاص الحاضرين في المزاد العلني سلعاً. إذا كان عدد الأشخاص في المزاد ١٢٠، فكم عدد الأشخاص الذي اشتروا سلعاً؟

(٦) يتضمن مقال ٤٢٠ جملة، ٨٠ جملة منها تتضمن أخطاءً مطبعية. ما الكسر (في أبسط صورة) الذي يدل على الجمل التي تتضمن أخطاءً مطبعية؟

(٧) ما العدد الذي يكون $\frac{2}{7}$ منه يساوي ٦٢٨؟

(٨) اشتري $\frac{3}{5}$ من الأشخاص الحاضرين في المسرح وجبات سريعة خلال فترة الاستراحة، واشتري $\frac{5}{7}$ من أولئك المشترين المثلثات. ما الكسر الذي يدل على الأشخاص الحاضرين في المسرح الذين اشتروا المثلثات؟

(٩) يُحاول كل من أحمد وسعيد وسليم توفير مبلغ من المال لتوزيعه في حفل خيري. إذا وفرَّ أحمد $\frac{1}{4}$ المبلغ المطلوب، ووفرَّ سعيد $\frac{2}{5}$ من المبلغ المطلوب ووفرَّ سليم $\frac{1}{6}$ من المبلغ المطلوب، فما الكسر المتبقى عليهم توفيره للوصول إلى المبلغ المطلوب؟

(١٠) تحتاج سلمى إلى $\frac{1}{2}$ أكواب من الأرز المطبوخ في وصفة المكبوس. إذا كان كوبان من الأرز غير المطبوخ مع $\frac{1}{2}$ كوب من الماء يعطي $\frac{1}{3}$ أكواب من الأرز المطبوخ، فكم كوباً من الأرز غير المطبوخ تحتاج سلمى لوصفتها؟ وكم كوباً من الماء يجب أن تضيف؟

رابط

٣-٢ النسبة المئوية

النسبة المئوية هي كسر مقامه العدد ١٠٠؛ والرمز المستخدم للدلالة على النسبة المئوية هو٪

لتجد ٤٠٪ من ٢٥، تحتاج إلى إيجاد $\frac{4}{100}$ من ٢٥؛ باستخدام ما تعرفه عن ضرب الكسور:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1} \times \frac{25}{100} &= \frac{25}{100} \\ \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} &= \frac{2}{1} \\ 10 &= \frac{5}{1} \times \frac{2}{1} \\ \text{إذن } 40\% \text{ من } 25 &= 10 \end{aligned}$$

ترتبط النسب المئوية عادة بالخصومات على السلع في الأسواق، حيث يعبر عن نسبة الخصم أو التخفيض على شكل نسبة مئوية. كما تعتمد بعض الحسابات المصرفية على عمليات، يعبر عنها بنسبة مئوية يتم على أساسها احتساب الفوائد المترتبة عليها. وتشتهر هذه التطبيقات المالية جزءاً مهماً من الاقتصاد.

٣-٢-١ الصيغ المتكافئة

يمكن تحويل النسبة المئوية إلى عدد عشري بالقسمة على العدد ١٠٠ (لاحظ أن الأرقام تتحرك من زلين إلى اليمين). إذن، $45\% = \frac{45}{100} = 0.45$ و $31\% = \frac{31}{100} = 0.31$.

يمكن تحويل العدد العشري إلى نسبة مئوية بالضرب في ١٠٠٪ (لاحظ أن الأرقام تتحرك من زلين اليسار). إذن، $65\% = \frac{65}{100} = 0.65$ و $70\% = \frac{70}{100} = 0.70$.

يتطلب التحويل من نسبة مئوية إلى كسر (وبالعكس) إلى خطوات إضافية.

مثال ٩

حول كلًّا من النسب المئوية الآتية إلى كسر في أبسط صورة:

أ ٢٥٪ ب ٣٠٪ ج ٣.٥٪

الحل

أ $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 25\%$

ب $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$

ج $\frac{35}{1000} = \frac{3.5}{100} = 3.5\%$

اكتب النسبة المئوية في صورة كسر مقامه العدد ١٠٠، ثم بسط.

تذَكَّر أن الكسر الذي يتضمن عدداً عشرياً لا يكون في أبسط صورة.

مثال ١٠

اكتب كلاً من الكسور الآتية في صورة نسبة مئوية:

أ $\frac{1}{8}$ ب $\frac{1}{20}$

الحلّ:

أوجد الكسر المكافئ ذا المقام ١٠٠ (تذكّر القيام بالإجراءات نفسها على كلّ من البسط والمقام).

$$\left(\% = \frac{1}{100} \times 100 \right) = \frac{1}{100} \times 0,05 = 0,005 = 0,5\%$$

أ $\% = \frac{5}{100} = \frac{5 \times 1}{5 \times 20} = \frac{1}{20}$

أوجد الكسر المكافئ ذا المقام ١٠٠ (تذكّر القيام بالإجراءات نفسها على كلّ من البسط والمقام).

$$\left(\% = \frac{1}{100} \times 100 \right) = \frac{1}{100} \times 12,5 = 0,125 = 12,5\%$$

ب $\frac{12,5 \times 1}{12,5 \times 8} = \frac{1}{8}$

$$\% = \frac{12,5}{100} =$$

ليس من السهل دائمًا إيجاد كسر مكافئ مقامه العدد ١٠٠ ومع ذلك يمكن تحويل أيّ كسر إلى نسبة مئوية بالضرب في العدد ١٠٠، ثم الاختصار.

مثال ١١

حول كلاً من الكسرتين الآتىين إلى نسبة مئوية:

أ $\frac{8}{15}$ ب $\frac{3}{40}$

الحلّ:

ب $\frac{1}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} = \frac{16}{45} = 0,333\ldots = 33,3\%$ (مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)
أي $33,3\% = \frac{8}{15}$

أ $\frac{3}{40} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = 0,25 = 25\%$
أي $25\% = \frac{3}{40}$

تمارين ٢-٣

(١) حول كلاً من النسب المئوية الآتية إلى كسور في أبسط صورة:

- أ ٢,٥٪ ب ٧٥٪ ج ٢٠٪ د ٣٦٪ ه ١٥٪ و ٢٠٪
ز ٢١٥٪ ح ١٣٢٪ ط ١١٧,٥٪ ي ١٠٨,٤٪ ك ٢٥٪ ل ٠٠٢٪

لاحقاً في هذه الوحدة، سترى أن النسب المئوية يمكن أن تكون أكبر من ١٠٠

(٤) اكتب كلاً من الكسور الآتية في صورة نسبة مئوية:

- هـ $\frac{8}{20}$ دـ $\frac{3}{10}$ جـ $\frac{17}{20}$ بـ $\frac{7}{25}$ أـ $\frac{3}{5}$

٣-٢ بـ كتابة عدد في صورة نسبة مئوية من عدد آخر

لكتابة عدد في صورة نسبة مئوية من عدد آخر، ابدأ بكتابته العدد الأول في صورة كسر من العدد الثاني، ثم اضرب في ١٠٠

مثال ١٢

أـ اكتب العدد ١٦ في صورة نسبة مئوية من العدد ٤٨

الحل:

اكتب أولاً العدد ١٦ في صورة كسر من العدد ٤٨، ثم اضرب في ١٠٠%

$$\% \frac{16}{48} = \% \frac{1}{3} = \% 33,3$$

(مقرّباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)

قد يكون من الأسهل كتابة الكسر في أبسط صورة أولاً.

$$\% \frac{16}{48} = \% \frac{1}{3} = \% 33,3$$

(مقرّباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)

بـ اكتب العدد ١٥ في صورة نسبة مئوية من العدد ٧٥

الحل:

اكتب العدد ١٥ في صورة كسر من العدد ٧٥، ثم بسط واضرب في ١٠٠٪؛ بما أنك تعرف أن ناتج قسمة على ٥ هو ٢٠، فلن تحتاج إلى آلة حاسبة.

$$\% \frac{15}{75} = \% \frac{1}{5} = \% 20$$

جـ اكتب العدد ١٨ في صورة نسبة مئوية من العدد ٢٣

الحل:

تحتاج إلى احتساب $\frac{18}{23} \times 100\%$ ، ولكن هذه ليست بالمهمة السهلة باستخدام الكسور لأنك لا تستطيع تبسيط الكسر أكثر ولأن العدد ٢٣ لا يقبل القسمة على ١٠٠ لذا يمكنك استخدام الآلة الحاسبة، متبّعاً الخطوات التالية:

= 0 0 1 × 3 2 ÷ 8 1
٧٨,٢٦٪ (مقرّباً إلى أقرب منزلتين عشربيتين).

تمارين ٣-٢-ب

اكتب الناتج، في كل ممّا يلي، في صورة عدد مكون من ثلاثة أرقام معنوية:

- (١) اكتب العدد ١٤ في صورة نسبة مئوية من العدد ٣٥
- (٢) اكتب العدد ٣,٥ في صورة نسبة مئوية من العدد ١٤
- (٣) اكتب العدد ١٧ في صورة نسبة مئوية من العدد ٦٣
- (٤) يعيش ٣٦ شخصاً في مجتمع سكني. إذا كان ٢٨ شخصاً منهم يمشون حول الحديقة كل صباح، فما النسبة المئوية للأشخاص الذين يعيشون في المجتمع ويعيشون حول الحديقة كل صباح؟
- (٥) حصل سعيد على درجة $\frac{19}{24}$ في اختبار ما. ما النسبة المئوية لدرجة سعيد؟
- (٦) اكتب العدد ١,٣ في صورة نسبة مئوية من العدد ٥,٢
- (٧) اكتب العدد ١٣,٠ في صورة نسبة مئوية من العدد ٥٢٠

٤-٢ الصيغة العلمية

عندما يكون العدد صغيراً جداً مثل ٣٦٢ ،٠٠٠٠٣٦٢، أو كبيراً جداً، مثل ٣٥٨٠٠٠٠٠، فقد تكون العمليات الحسابية صعبة ويكون سهلاً نسيان بعض الأصفار. تُستخدم **الصيغة العلمية** للتعبير عن الأعداد الصغيرة جداً والكبيرة جداً بطريقة فعالة. تكتب الأعداد في الصيغة العلمية في صورة عدد أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠ مضروباً في قوى العدد ١٠.

٤-٢-١ الصيغة العلمية للأعداد الكبيرة

يتمثل فهم الصيغة العلمية للأعداد الكبيرة من خلال ما يحدث عندما تضرب في قوى موجبة للعدد ١٠؛ وكل مرة تضرب فيها عدداً في ١٠ تتحرّك الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليمين.

تذكّر أن الأرقام مرتبة بحسب القيمة المكانية:

أجزاء من ١٠٠٠	أجزاء من ١٠٠	أجزاء من ١٠	أحاد عشرات مئات	آلاف
٣	.	.	.	١٠٠٠

٣٢

تحرّك الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليمين $32,0 = 10 \times 3,2$

تحرّك الفاصلة العشرية منزلتين إلى اليمين $220,0 = 100 \times 3,2$

تحرّك الفاصلة العشرية ثلاث منازل إلى اليمين $3200,0 = 1000 \times 3,2$... وهكذا. لابد من أنك لاحظت أن نمطاً ما قد تشكّل.

يمكن التعبير عن أيّ عدد كبير في الصيغة العلمية، وذلك بكتابته في صورة عدد أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠ مضروباً في قوى مناسبة للعدد ١٠ لكتابية الأعداد الكبيرة في الصيغة العلمية تتبع الخطوات التالية:

- وضع فاصلة بحيث تكون على يمين أول رقم معنوي (غير الصفر) من جهة اليسار.
- نحسب عدد الأرقام إلى يمين الفاصلة (قوى العدد عشرة).
- أكتب العدد مضروباً في قوى العدد ١٠، بناءً على عدد المنازل التي تحرّكتها الفاصلة العشرية.

مثال ١٢

اكتب العدد ٣٢٠٠٠ بالصيغة العلمية:

الحلّ:

وضع فاصلة عشرية على يمين أول رقم معنوي من جهة اليسار (٣)

$$3^{\text{٣}} ٢٠٠٠ = ٣٢٠٠٠$$

احسب عدد الأرقام على يمين الفاصلة العشرية (٥ أرقام)

$$= 10 \times ٣,٢٠٠٠٠$$

٥٤٣٢١

الصيغة العلمية للعدد

$$\therefore ٣٢٠٠٠ = ١٠ \times ٣,٢$$

إجراء عمليات حسابية باستخدام الصيغة العلمية

عندما تحوّل الأعداد الكبيرة إلى الصيغة العلمية، يمكنك استخدام قوانين الأسس لتجري حسابات تتضمن الضرب والقسمة.

مثال ١٤

أوجد الناتج ثم اكتبه في الصيغة العلمية:

أ $(^310 \times 2) \times (^510 \times 3)$ **ب** $(^310 \times 8) \times (^710 \times 2)$

ج $(^810 \times 3) + (^410 \times 1,4) \div (^210 \times 2,8)$ **د** $(^610 \times 9) \div (^410 \times 1,4)$

الحلّ:

بسط بوضع الحدود المتشابهة معاً. استخدم قوانين الأسس حيث يلزم. اكتب العدد في الصيغة العلمية.

أ $(^310 \times 2) \times (^510 \times 3) = (^610 \times 2 \times 3)$

$$6+510 \times 6 =$$

$$1110 \times 6 =$$

تعد الإجابة $10 \times 1,6$ صحيحة، ولكنها ليست في الصيغة العلمية لأن $1,6$ أكبر من 10 ؛ يمكنك تغيير الإجابة إلى الصيغة العلمية بالتفكير في $1,6$ على أنه $10 \times 1,6$.

ب $(^310 \times 8) \times (^710 \times 2) = (^{10}10 \times 16)$

$$1010 \times 16 =$$

$$1010 \times 1,6 = 1010 \times 10 \times 1,6$$

$$1110 \times 1,6 =$$

بسط بوضع الحدود المتشابهة معاً. استخدم قوانين الأسس.

ج $\frac{(^710 \times 2,8)}{(^410 \times 1,4)} = (^{10}10 \times 2)$

$$4-610 \times 2 =$$

$$210 \times 2 =$$

رغم أن ترتيب المنزلة هو الذي يتغير، لكن يبدو أن الفاصلة العشرية هي التي تتحرك إلى اليمين.

عندما تحل مسائل تتضمن الصيغة العلمية، يجب أن تتحقق من نتائجك بدقة. تأكّد دائمًا من أن الإجابة الأخيرة مكتوبة في الصيغة العلمية. وتأكد أيضًا من تحقق كل الشروط، ومن أن الجزء العددي أكبر من أو يساوي 1 وأصغر من 10 .

عند جمع أو طرح
عددين مكتوبين في
الصيغة العلمية، يسهل
تحويل كلّ منهما إلى
الصورة الاعتيادية أولاً،
ثم تحويل النتيجة إلى
الصيغة العلمية.

$$\begin{aligned}
 & ({}^810 \times 9) + ({}^610 \times 3) \\
 & 900000 = {}^610 \times 9 \\
 & 3000000 = {}^810 \times 3 \\
 & 3000000 + ({}^810 \times 3) + ({}^610 \times 9) = 30900000 \\
 & 30900000 = \\
 & {}^810 \times 309
 \end{aligned}$$

٥

لتُسَهِّل جمع الأعداد، تأكَّد من
ترتيب العددان رأسياً حسب القيمة
المكانية:

٣٠٠٠٠٠٠
٩٠٠٠٠٠٠ +

تمارين ٤-٢-أ

(١) اكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصيغة العلمية:

- | | | | | | | | |
|------------|---|--------|---|-----------|----|-----|---|
| ٦٥٤٠٠٠٠٠٠٠ | ج | ٤٢٠٠٠٠ | ب | ٤٥٦٠٠٠٠٠٠ | د | ٣٨٠ | أ |
| | ح | ١٠,٣ | ز | ٥ | ٢٠ | هـ | |

(٢) اكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصورة الاعتيادية:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| ج ${}^710 \times 1,05$ | ب ${}^810 \times 3,1$ | أ ${}^610 \times 2,4$ |
| هـ ${}^110 \times 7,1$ | د ${}^210 \times 9,9$ | |

(٣) أوجد ناتج كُلّ مما يلي، واكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

- | | |
|--|--|
| ب $({}^{17}10 \times 4) \times ({}^410 \times 2)$ | أ $({}^210 \times 2) \times ({}^1710 \times 4)$ |
| د $({}^{17}10 \times 0,2) \times ({}^{17}10 \times 0,7)$ | ج $({}^210 \times 12) \times ({}^010 \times 11)$ |

$$\text{هـ } ({}^{17}10 \times 8) \div ({}^{17}10 \times 4) = ({}^{17}10 \times 8) \div ({}^{17}10 \times 4)$$

$$\text{ز } ({}^210 \times 8) \div ({}^410 \times 2) = ({}^210 \times 8) \div ({}^410 \times 2)$$

$$\text{ط } \frac{({}^810 \times 1,7)}{({}^610 \times 3,4)} = \frac{({}^810 \times 1,7)}{({}^610 \times 3,4)}$$

$$\text{كـ } ({}^610 \times 3,6) \times ({}^010 \times 4,9)$$

عند التحويل من الصيغة العلمية
إلى الصورة الاعتيادية، تدلُّك
قوى العدد 10 على عدد المنازل
العشبية التي تتحرَّكها الفاصلة
العشبية إلى اليمين، وليس على
عدد الأصفار الموجودة في العدد.

٤) أوجد ناتج كل مما يلي، واترك إجابتك في الصيغة العلمية:

- | | | | |
|---|---|----|---|
| ب | $(^310 \times 4) + (^310 \times 2)$ | أ | $(^310 \times 4) - (^310 \times 3)$ |
| د | $(^310 \times 7,1) - (^310 \times 4,3)$ | ج | $(^310 \times 5,6) + (^310 \times 2,7)$ |
| | | هـ | $(^310 \times 2,7) - (^310 \times 5,8)$ |

تذكّر أنك تستطيع كتابة هذه الأعداد في الصورة الاعتيادية قبل إجراء عملية الجمع أو الطرح.

٤-٢-ب الصيغة العلمية للأعداد الصغيرة

لاحظت أن الفاصلة العشرية تتحرّك عدداً من المنازل إلى اليمين بالترتيب عند الضرب في قوى موجبة للعدد ١٠؛ ولكن إذا قسمت على قوى موجبة للعدد ١٠، تتحرّك الفاصلة العشرية عدداً من المنازل بالترتيب إلى اليسار؛ وبذلك يصبح العدد أصغر.

اعتبر النمط الآتي:

٢٣٠٠

$$230 = 10 \div 2300$$

$$23 = 10 \div 230 = 100 \div 2300$$

$$2,3 = 10 \div 2300 = 1000 \div 2300$$

وهكذا ...

لاحظت أن الفاصلة العشرية تتحرّك عدداً من المنازل بالترتيب إلى اليسار، وبما أن تحريك الفاصلة العشرية إلى اليمين يرفع العدد ١٠ إلى قوى بأسٌ موجب، فإن تحريك الفاصلة العشرية إلى اليسار يرفع العدد ١٠ إلى قوى بأسٌ سالب.

تذكّر أيضاً من الصف الثامن أنك تستطيع أن تكتب قوى سالبة لتشير إلى أنك تجري عملية قسمة. وقد لاحظت أعلاه، مع الأعداد الصغيرة، أنك تقسم على العدد ١٠ لتكتب العدد في الصيغة العلمية.

رابط

يعامل علم الفلك مع الأعداد الكبيرة جداً والصغيرة جداً. ومن غير المنطقي كتابتها في الصورة الاعتيادية كلّ مرة احتجت فيها إلى كتابتها. يجعل الصيغة العلمية إجراء العمليات الحسابية وكتابتها سهلاً.

مثال ١٥

اكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصيغة العلمية:

أ) $0,004 \times 10^3$ ب) $2 \times 10 \times 10^3$ ج) $0,0000034$

الحلّ:

حرّك الفاصلة العشرية واكتبها بعد أول رقم معنوي من جهة اليمين (٤).

احسب عدد المنازل التي تحركتها الفاصلة العشرية (٣ أرقام) لتكون قوى العدد ١٠ هي (٣).

أ)

$$3 \times 10^{-4} = 0,0004$$

لاحظ أن أول رقم معنوي في العدد $0,0000034$ يقع في المنزلة السابعة بعد الفاصلة العشرية وأن قوى العدد ١٠ هي -7 .

ب)

$$7 \times 10^{-3} = 0,0000034$$

بسط بتجميع الحدود المتشابهة معاً.
استخدم قوانين الأسس.

ج)

$$\begin{aligned} & (3 \times 10^{-4}) \times (2 \times 10^{-3}) = \\ & (3 \times 2) \times (10^{-4} \times 10^{-3}) = \\ & 6 \times 10^{-7} = \\ & 10^{-7} \times 6 = \end{aligned}$$

تمارين ٤-٢-ب

(١) اكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصيغة العلمية:

أ) $0,0000564$ ب) $0,000032$ ج) $0,00000564$

(٢) اكتب كلاً من الأعداد الآتية في الصورة الاعتيادية:

أ) 3×10^{-4} ب) 6×10^{-3} ج) 2×10^{-2}

د) 8×10^{-1} هـ) 1×10^{-7}

عند استخدام الصيغة العلمية مع الأسس السالبة، تدلّق القوى التي يرفع إليها العدد ١٠ على موقع أول رقم معنوي بعد (يمين) الفاصلة العشرية.

(٣) أوجد ناتج كل مما يلي، واتكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

- أ** $(2 \times 10^{-4}) \times (4 \times 10^{-4})$
ب $(1,6 \times 10^{-4}) \times (10^{-4} \times 4)$
ج $(1,5 \times 10^{-4}) \times (2,1 \times 10^{-3})$
د $(10^{-3} \times 2) \times (10^{-1} \times 11)$
هـ $(10^{-1} \times 4,5) \div (10^{-1} \times 10^{-1})$
وـ $(7 \times 10^{-1}) \div (10^{-1} \times 10^{-1})$
زـ $(4,5 \times 10^{-1}) \div (10^{-1} \times 10^{-1})$
حـ $(10^{-1} \times 11) \div (10^{-1} \times 2)$

في بعض الحسابات، قد تحتاج إلى تحويل حد ما إلى الصيغة العلمية قبل القيام بعملية الضرب أو عملية القسمة.

(٤) أوجد ناتج كل مما يلي، واتكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

- أ** $(10^{-3} \times 3,2) + (10^{-4} \times 2,7)$
بـ $(10^{-4} \times 2,7) + (10^{-3} \times 3,2)$
جـ $(10^{-1} \times 1,44) + (10^{-1} \times 5,6)$
دـ $(10^{-1} \times 2,32) - (10^{-1} \times 1,44)$

تذكّر أنك تستطيع كتابة هذه الأعداد في الصورة الاعتيادية قبل الجمع أو الطرح.

طبق مهاراتك

(٥) أوجد عدد الثواني في يوم واحد، واتكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

(٦) تبلغ سرعة الضوء حوالي 3×10^8 متر في الثانية. ما المسافة التي يقطعها الضوء في:

- أ** ١٠ ثوانٍ
بـ ٢٠ ثانية
جـ ١٠٢ ثانية

(٧) تُقاس البيانات المخزنة (في الحواسيب) بالغيغابايت. واحد غيغابايت يساوي 2^{30} .
بایت.

- أ** اكتب العدد 2^{30} في الصيغة العلمية مُقرّباً إلى عدد مُكون من رقم معنوي واحد.
بـ يوجد 1024 غيغابايت في كل واحد تيرابايت. كم بایتاً يوجد في التيرابايت الواحد؟ اكتب إجابتك في الصيغة العلمية مُقرّبة إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد.

٥-٢ الآلة الحاسبة والصيغة العلمية

يمكنك في الآلات الحاسبة العلمية الحديثة أن تدخل الأعداد في الصيغة العلمية. أضف إلى ذلك أن الآلة الحاسبة تعرض الأعداد ذات الأرقام الكثيرة على الشاشة في الصيغة العلمية أيضاً.

مفاتيح الآلة الحاسبة المكتوبة في الصيغة العلمية

تحتاج إلى استخدام المفتاح $\times 10^x$ أو أحد المفاتيح **EE** أو **Exp** في آلتكم الحاسبة. تُعرف هذه المفاتيح بأنّها مفاتيح الأسّ. تعمل جميع مفاتيح الأسّ بالطريقة نفسها. لذلك يمكنك اتّباع المثال الآتي على آلتكم الحاسبة مستخدماً أيّ مفتاح من مفاتيح الأسّ موجود عليها، وستحصل على النتيجة نفسها.

عندما تستخدم مفتاح الأسّ الموجود في آلتكم الحاسبة، لا تدخل الجزء المُتعلّق بـ $\times 10^x$ في الحسابات. تعمل الآلة الحاسبة على هذا الجزء من الحسابات آلّياً باعتباره جزءاً من الدالة.

مثال ١٦

اكتب كلاً مما يأتي في الصورة الاعتيادية باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\text{أ } 2,134 \times 10^4 \quad \text{ب } 3,124 \times 10^{-6}$$

الحلّ:

انقر: = [4] $\times 10^x$ [4] [3] [1] [.] [2]

هذه هي الإجابة التي ستحصل عليها.

$$\text{أ } 2,134 \times 10^4$$

$$21340 =$$

انقر: = [6] [-] Exp [4] [2] [1] [.] [3]

هذه هي الإجابة التي ستحصل عليها.

$$\text{ب } 3,124 \times 10^{-6}$$

$$0,00003124 =$$

الاستفادة مما تعرّضه الآلة الحاسبة

بالاعتماد على آلتكم الحاسبة، ستُعرض الإجابة في الصيغة العلمية على خطٍ مع أسّ كما هو مُبيّن أدناه:

$$\text{وهذا هو } 5,98 \times 10^{-6}$$

$$5.98E-06$$

أو على خطين: أحدهما للحسابات والأخر للإجابة، كما هو مُبيّن أدناه:

$$\text{وهذا هو } 2,06 \times 10^{24}$$

$$\begin{array}{r} 6.23E23*4.11 \\ \hline 2.56E24 \end{array}$$

تعمل الآلات الحاسبة المختلفة بطرق مختلفة. وأنّك في حاجة لتعرف كيف تعمل آلتكم الحاسبة. تأكّد أنّك تعرف المفاتيح المستخدمة لإدخال الحسابات في الصيغة العلمية، وكيف تفسّر ما يعرض، وكيف تحول الإجابة إلى صورة كسر عشري.

إذا طُلب منك أن تُقدم الإجابة في الصيغة العلمية، فإن كل ما عليك القيام به هو تفسير المعروض وكتابة الإجابة بطريقة صحيحة. ولكن إذا طُلب منك تقديم الإجابة في الصورة الاعتيادية (العدد العشري)، فيجب أن تطبق القوانيين التي تعرفها لكتب الإجابة بالطريقة الصحيحة.

تمارين ٥-٢

(١) استخدم آلتاك الحاسبة، واتكتب إجابتك في الصيغة العلمية:

أ $^0 4234$
ب $29200 \div 0,0008$

ج $^0(1,009)$
د $^4(876 \times 97)$

ه $^2(0,0098)$
و $\frac{9754}{^4(0,0005)}$

ز $^2(10 \times 4,22)$
ح $(^010 \times 2,8) \times 9,27$

ط $(^010 \times 7,2) \div (^710 \times 3,2)$
ي $(^710 \times 2,3) + (^010 \times 4,2)$

ك $\sqrt[7]{10 \times 3,247}$
ل $\sqrt[9]{10 \times 4,1267}$

(٢) تبلغ سرعة الضوء 3×10^8 كيلومتر في الثانية. ما المسافة التي يقطعها الضوء في السنة الواحدة؟

(٣) تم تذوب سبيكة من الذهب كتلتها 4 كغم لصناعة خواتم ذهبية كتلة كل منها 5×10^{-3} كغم. كم خاتماً ذهبياً يمكن أن يُصنع من هذه السبيكة بعد تذوبتها؟

(٤) قطعة مستطيلة الشكل طولها $2 \times 10^{-3} \text{ م}$ وعرضها $4 \times 10^{-4} \text{ م}$. كم يبلغ الفرق بين طول القطعة وعرضها؟

٦-٢ الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية

جميع الأعداد التي استخدمتها حتى الآن في الرياضيات هي أعداد حقيقة، وهي تتضمن الأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية والأعداد غير النسبية (وجميعها يمكن أن تكون موجبة أو سالبة).

الأعداد النسبية

عرفت الأعداد العشرية من قبل وكيفية استخدامها لكتابه أعداد ليست كاملة. ويمكن التعبير عن بعض هذه الأعداد في صورة كسور اعتيادية أو كسور غير اعتيادية. مثلاً:

$$\frac{1}{3} = 0,33333333 \dots \quad \frac{1}{8} = 0,125 \quad \frac{5}{2} = 2,5 \quad \frac{1}{3} = 0,5$$

وهكذا ...

أيّ عدد يمكن التعبير عنه في صورة كسر، بسطه ومقامه عددان صحيحان ومقامه لا يُساوي الصفر، يُسمى عدداً نسبياً.

لاحظ أن هناك نوعين من الأعداد النسبية: **أعداد عشرية مُنتهية** (وهي الأعداد التي يكون فيها الجزء العشري مُنتهيًّا) و**أعداد عشرية دورية** (وهي الأعداد التي يكون فيها الجزء العشري مُستمراً من دون توقف، ولكن يُكرر نفسه بفترات مُ المنتظمة).

يمكن التعبير عن الأعداد العشرية الدورية باستخدام نقطة أعلى الرقم، أو الأرقام التي تتكرر:

$$0,30\dot{2} \dots = 0,302302202302 \dots \quad 0,3\dot{2} \dots = 0,3232323232 \dots \\ 0,4\dot{5} \dots = 0,45454545 \dots$$

تحويل الأعداد العشرية الدورية إلى كسور

كيف نتعامل مع الأعداد العشرية الدورية؟ هل هذا النوع من الأعداد نسبي أم غير نسبي؟ سنتعامل مثلاً مع العدد $0,44444\dots$

يمكننا استخدام الجبر لإيجاد طريقة أخرى لكتابه العدد العشري الدوري:

افتراض

$$s = 0,44444\dots$$

فيكون

$$1s = 4,44444\dots$$

يمكن أن نطرح s من $1s$ كما يلي:

$$\begin{array}{r} 1s = 4,44444\dots \\ s = 0,44444\dots \\ \hline 4s = 4 \\ \hline s = \frac{4}{9} \end{array}$$

تذكّر أن النقطة أعلى رقم واحد تعني أن لديك عدداً عشرانياً دوريًّا. وعند تكرار أكثر من رقم، فإننا نضع نقطة أعلى الرقم المترافق الأول وأعلى الرقم المترافق الآخر. مثال $0,418418418\dots = 0,418418418\dots$ و $0,342222\dots = 0,342\dots$

أيّ عدد عشرائي دوري هو عدد نسبي. ويمكن على الدوام كتابة العدد العشري الدوري في صورة كسر.

لاحظ أن ذلك يُبيّن كيفية كتابة العدد العشري الدوري في صورة كسر. وهذا يعني أن $\frac{1}{n}$, عدد نسبي. يمكننا في الحقيقة كتابة جميع الأعداد العشرية الدورية في صورة كسور؛ ما يعني أنها أعداد نسبية.

مثال ١٧

استخدم الجبر لكتب كلًّا من الأعداد الآتية في صورة كسور. بسط الكسور قدر الإمكان:

٠,٥٢٤

٠,٩٣٤

٠,٢٤

٠,٣

الحل:

أعد كتابة العدد العشري الدوري بكتابة الرقم المتكرر أكثر من مرة.

اضرب في 10 ، بحيث تبقى الأرقام المتكررة مكتوبة بعضها فوق بعض تماماً.

اطرح.

اقسم على 9 ثم بسط.

$$س = \dots 0,33333$$

أ

$$10s = \dots 3,33333$$

$$\begin{array}{r} 10s = \dots 3,33333 \\ - s = \dots 0,33333 \\ \hline 9s = \dots 3 \\ \therefore s = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{array}$$

اضرب في 100

اطرح.

اقسم الطرفين على 99 ثم بسط.

$$s = \dots 0,242424$$

ب

$$100s = \dots 24,242424$$

$$0,24 - 24,24 = 99s$$

$$99s = 24$$

$$\therefore s = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

لاحظ أنك بدأت الضرب في العدد 100 لتتأكد

من أن الرقمين (2) ، (4) مكتوبان في المنازل

الصحيحة بعد الفاصلة العشرية.

لدينا الآن ثلاثة أرقام متكررة. للتأكد من أن هذه

الأرقام مكتوبة بعضها فوق بعض تماماً،

اضرب في العدد 1000 ، بحيث تتحرك كل الأرقام ثلاثة منزلات.

اطرح.

$$s = \dots 0,934934$$

ج

$$1000s = \dots 934,934934$$

$$934,934934 - 0,934934 = 999s$$

$$\begin{array}{r} 999s = 934 \\ \hline s = \frac{934}{999} = \frac{31}{33} \end{array}$$

مساعدة

عندما تتمكن من وضع الأرقام المتكررة بعد الفاصلة العشرية مباشرة، فإنك تحتاج إلى الضرب

مرة أخرى في قوى العدد 10

يجب أن تكون القوة التي تختارها متساوية لعدد الأرقام المتكررة.

متكرر الأرقام $3,9,4,4$ ؛ لذا فإننا

نضرب في العدد $1000 = 31$

اضرب في العدد ١٠٠ لتبدأ الأرقام المتكررة مباشرةً بعد الفاصلة العشرية.

أكمل كما في الفرع الأول من المثال، بالضرب في العدد ١٠ مرة جديدة لتحرك الأرقام منزلة واحدة إضافية.

اطرح وبسيط.

$$\begin{aligned} s &= \dots , 5244444 \\ 52,444444 &= \dots 100 \\ 524,444444 &= \dots 1000 \\ 524,444444 &= \dots 10000 \\ 524,444444 &= \dots 100000 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 472 = 472 \\ 118 = 472 \\ \hline 225 = 900 \\ \hline s \end{array} \Leftarrow$$

النقطة الأساسية هي الحاجة إلى طرح عددين مختلفين، ولكن بطريقة تُمكّن من حذف الجزء المتكرر. وهذا يعني أن عليك أحياناً الضرب في ١٠ أو في ١٠٠ وأحياناً في ١٠٠٠، بالاستناد إلى عدد الأرقام المتكررة.

٦-٢ تمارين

(١) انسخ كلاً من المعادلات الآتية وأكملها بملء الفراغ بالعدد الصحيح أو الرمز الصحيح:

ليكن $s = 0.\overline{6}$ أ

$\boxed{} = 10s$

باستخدام الطرح:

$\boxed{} = 10s$

$s = 0.\overline{6} \quad -$

$\boxed{} = \boxed{}s$

$\boxed{} = s \quad \therefore$

باستخدام التبسيط:

$\boxed{} = s$

ليكن $s = 0.\overline{7}$ ب

$\boxed{} = 100s$

باستخدام الطرح:

$\boxed{} = 100s$

$s = 0.\overline{7} \quad -$

$\boxed{} = \boxed{}s$

$\boxed{} = s \quad \therefore$

(٢) اكتب كلاً من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر في أبسط صورة:

- | | | | | | | | |
|---|-------|---|-------|---|-------|----|------------------------------|
| د | ٠,٢٤٥ | ج | ٠,٨ | ب | ٠,٥ | أ | ٠,٣٦٥ |
| ح | ٠,٢٣٣ | ز | ٠,٦١٨ | و | ٠,٣٦٩ | هـ | ٠,٦١٩ |
| ل | ٠,٠٣٥ | ك | ٠,١٨٠ | ي | ٠,٠٦٢ | طـ | ٠,٢٠٨ |
| | | | | | | م | $0.36 + 2.36 \times 10^{-3}$ |
| | | | | | | ن | $0.7 + 0.7 \times 10^{-3}$ |

(٣) حدد إن كان العدد نسبياً أو غير نسبي في كل مما يلي:

- | | | | | | | | |
|----|---------------|----|------------------|----|-------------------|----|---------------|
| د | ٢,١٤٧ | ج | ٧^-٤ | ب | ٤ | أ | $\frac{1}{4}$ |
| حـ | . | ز | $\overline{25}٧$ | وـ | $\overline{3}٧$ | هـ | π |
| لـ | $\frac{3}{8}$ | كـ | $232-٠$ | يـ | $-٦٧,٤٥$ | طـ | 0.45 |
| عـ | ٢٦٣ | سـ | $\pi ٢$ | نـ | $\overline{1}٢٣٧$ | مـ | $٩,٤٥$ |

(٤) وضح أن الأعداد الآتية نسبية:

- أ ٦ ب ٢٨ ج ١,١٢ د ٠,٨ هـ ٠,٤٢٧ وـ ٢,١٤

(٥) أ وجد ناتج كل مما يأتي:

$$(1) ١ - ٠,٩ = ٠,١ \quad (2) ٠,٩ - ١ = -٠,١ \quad (3) ٠,٩٩ - ١ = -٠,١ \quad (4) ٠,٩٩٩ - ١ = -٠,٩$$

بـ دقق إجابات الجُزئية أـ . مادا يحدث للإجابة عندما يزداد عدد الأرقام في العدد المطروح؟ إلى أي عدد تقترب الإجابة؟

جـ استخدم الجبر لتعبر عن العدددين ٠,٦ ، ٠,٢ في صورة كسررين في أبسط صورة.

دـ اكتب ناتج $٠,٢ + ٠,٠$ في صورة عدد عشري دوري.

هـ استخدم إجابة الجُزئية جـ لتكتب $٠,٢ + ٠,٠$ في صورة كسر في أبسط صورة.

وـ كرر الآن الجُزئيات جـ ، دـ ، هـ مستخدماً العدددين العشريين الدوريين ٠,٥ ، ٠,٦

زـ وضح كيف يرتبط ما وجدته في الجُزئية وـ بإجابتك للجزئيتين أـ ، بـ .

٦) طلب المعلم من طلاب الصف أن يجدوا أكبر عدد أصغر من ٤، ٥؛ أجاب وليد أن العدد هو ٤، ٤

- أ لماذا تُعد إجابة وليد خاطئة؟
- ب اقترح أحمد أن الإجابة هي ٤، ٤٩٩٩، لماذا تُعد إجابة أحمد خاطئة؟
- ج اقترح خالد أن الإجابة هي ٤، ٤ هل تُعد إجابة خالد صحيحة؟ فسر إجابتك.

٧) أوجد عدداً في الفترة $1 < s < 3$ ، بحيث يكون:

- أ س عدداً نسبياً
- ب س عدداً حقيقياً غير نسبيّ
- ج س عدداً صحيحاً
- د س عدداً طبيعياً

٨) أي مجموعة تتضمن عناصر أكثر: مجموعة الأعداد النسبية أم مجموعة الأعداد غير النسبية؟ لماذا؟

مُلْخَص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن إيجاد كسر مكافئ من خلال ضرب أو قسمة البسط والمقام في نفس العدد غير الصفر.
- يمكن جمع الكسور أو طرحها، ولكن يجب أن تتأكد من أن للكسور نفس المقام.
- لضرب كسرتين، اضرب البسطين واضرب المقامين.
- لتقسم على كسر، أوجد مقلوبه، ثم اضرب الكسرتين.
- النسب المئوية هي كسور مقام كل منها العدد ١٠٠
- يمكن استخدام الصيغة العلمية لكتابة الأعداد الكبيرة جداً والأعداد الصغيرة جداً بسهولة.
- العدد النسبي هو عدد يمكن كتابته في صورة كسر.
- يتضمن العدد النسبي الدوري جزءاً عشرانياً يتكرر باستمرار من دون توقف.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد كسر العدد.
- إيجاد نسبة مئوية من عدد.
- إيجاد عدد في صورة نسبة مئوية من عدد آخر.
- إجراء حسابات على أعداد مكتوبة في الصيغة العلمية.
- كتابة عدد عشري دوري في صورة كسر في أبسط صورة.

تمارين نهاية الوحدة

(١) احسب $\frac{5}{4} + \frac{1}{8}$; واتكتب إجابتك في صورة كسر في أبسط صورة.

(٢) خضع ٩٣٨٠٠ طالب لامتحان دولي:

حصل ١٩٪ من الطلاب على الدرجة (أ)

حصل ٢٤٪ من الطلاب على الدرجة (ب)

حصل ٣١٪ من الطلاب على الدرجة (ج)

حصل ١٥٪ من الطلاب على الدرجة (د)

حصل ١١٪ من الطلاب على الدرجة (ه)

(أ) اكتب الكسر الذي يُمثل عدد الطلاب الذين حصلوا على الدرجة (ب) في أبسط صورة.

(ب) كم طالباً حصل على الدرجة (أ)؟

(٣) أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة (دون استخدام الآلة الحاسبة):

$$1\frac{2}{3} + \frac{4}{9} \quad \text{(د)} \quad 1\frac{2}{7} - \frac{4}{9} \quad \text{(ب)} \quad 1\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \quad \text{(ج)} \quad 1\frac{2}{7} \div \frac{4}{9} \quad \text{(أ)}$$

(٤) حصل ماجد على الدرجات التالية في ثلاثة اختبارات:

الاختبار الأول: ٢٣ من ٤٠

الاختبار الثاني: ٥٤ من ٩٠

الاختبار الثالث: ٢٠ من ٣٥

أوجد النسبة المئوية لدرجات ماجد في كل اختبار، ثم حدد الدرجة الأفضل.

(٥) اكتب كل عدد من الأعداد التالية في الصيغة العلمية:

$$8,4 \quad \text{(د)} \quad 75,2 \quad \text{(ج)} \quad 62000 \quad \text{(ب)} \quad 425,000 \quad \text{(أ)}$$

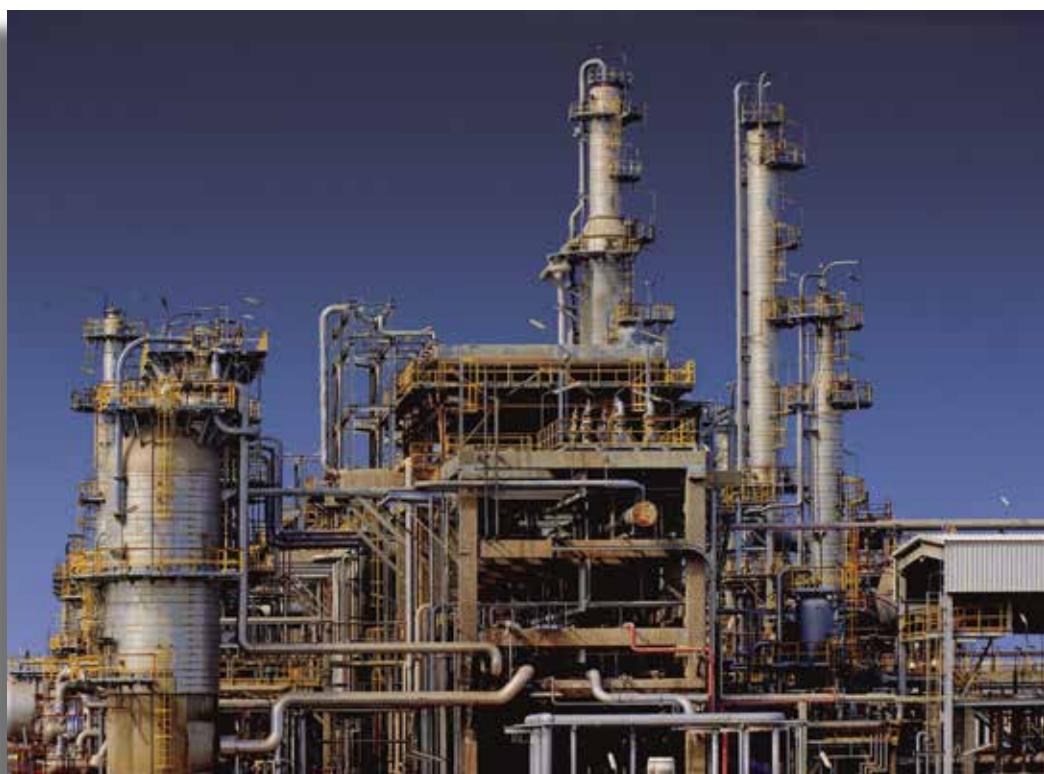
(٦) أوجد الناتج في كل مما يلي في أبسط صورة:

$$(٤ \times ٤) + (١٠ \times ٣) \quad \text{(ب)} \quad (١٠ \times ٢) \times (١٠ \times ٢) \quad \text{(أ)}$$

$$(٣ \times ٨) \div (١٠ \times ٢) \quad \text{(د)} \quad (٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢) \quad \text{(ج)}$$

$$(٤ \times ٨) - (١٠ \times ٧) \quad \text{(ه)}$$

الوحدة الثالثة: فهم الجبر



المفردات

Algebra	الجبر
Variable	المتغير
Constant	الثابت
Equation	المعادلة
Formula	الصيغة
Substitution	التعويض
Expression	العبارة
Term	الحد
Powers	القوى
Index/Indices	الأسس / الأسس
Coefficient	المعامل
Base	الأساس
Reciprocal	المقلوب
Expand/expansion	فك الأقواس
Simplify	تبسيط

سوف تتعلم في هذه الوحدة
كيف:

- تستخدم الحروف لتمثيل الأعداد
- تكتب العبارات الجبرية لتمثيل معلومات رياضية
- تعوض أعداداً عن حروف لتجد قيمة عبارة جبرية
- تجمع الحدود المتشابهة وتطرحها لتبسيط العبارات الجبرية
- تضرب وتقسم لتبسيط العبارات الجبرية
- تفك الأقواس في العبارات بالخلص من رموز التجميع
- تستخدم الصيغة الأسية في الجبر
- تتعلم قوانين الأسس وتطبقها لتبسيط العبارات الجبرية
- تعامل مع الأسس الكسرية

تعمل وزارة التجارة والصناعة وترويج الاستثمار في سلطنة عُمان ضمن الرؤية المستقبلية للسلطنة 'رؤية عمان ٢٠٤٠'، وبالتعاون مع المنظمات العالمية، على تحديث الاستراتيجية الصناعية ٢٠٤٠، والهادفة إلى المُساهمة في تعزيز تنافسية القطاع الصناعي ونموه وتعزيز دوره في الاقتصاد المحلي. يُساعد الجبر في هذا السياق من خلال الصيغ التي يُقدمها، ومن خلال ارتباطه المباشر بالمسائل المتعلقة بالنقود والأبنية والإنشاءات والاقتصاد والإحصاء والهندسة، وسوى ذلك الكثير ...

يمكنك التفكير في **الجبر** على أنه لغة الرياضيات. يستخدم الجبر الحروف والرموز الأخرى لكتابة المعلومات الرياضية بطرق مختصرة. عندما تتعلم لغة ما، عليك تعلم قواعدها وبنيتها. ولغة الجبر هي أيضاً لها قواعد وبنية. عندما تعرف ذلك، يمكنك أن 'تتكلّم' بلغة الجبر، وسيفهم كل رياضي العالم عليك.

فائدة



يجب أن تكون المفاهيم الجبرية الآتية مألوفة لديك:

أساسيات الجبر

في الجبر، نستخدم الحروف بدلاً من القيمة المجهولة أو القيمة المُتغيّرة، ويمكن أن تتضمن العبارة الجبرية أعداداً ومُتغيّرات ورموز عمليات بما فيها الأقواس. ولا تتضمن العبارات الجبرية إشارة المساواة. كل العبارات الآتية هي عبارات جبرية:

$$\frac{3}{n} = \frac{(s + c)}{(2 - a)}$$

تعويض القيمة عن الحروف (المتغيّرات)

إذا أعطيت قيمة الحروف، يمكنك أن تعوضها لتجد قيمة العبارة الجبرية.

إذا كان المعطى $s = 2$ ، $c = 5$:

تصبح قيمة العبارة الجبرية $s + c$ مساوية لـ $2 + 5$

وتصبح قيمة العبارة الجبرية $\frac{s}{2}$ مساوية لـ $\frac{5}{2}$

وتصبح قيمة العبارة الجبرية $s \times c$ مساوية لـ 2×5

وتصبح قيمة العبارة الجبرية $s \times c$ مساوية لـ 2×5 وقيمة العبارة s^2 مساوية لـ 25

١-٣ استخدام الحروف (المتغيّرات) لتمثيل القيمة المجهولة

$2 + s = 10$ هما معادلتان.
في المعادلة $2 + s = 8$ هناك قيمة واحدة للمتغير s ، لكن في المعادلة $a + b = 10$ ، يمكن للمتغيّرين a ، b أن يمثّلاً عدداً من القيم المختلفة. يمكنك أحياناً حلّ المعادلة بإيجاد القيمة التي تجعلها صحيحة.

في الجبر، عندما تمثل الحروف
قِيمَا مُخْتَلِفة، تسمى الحروف
مُتغِيّرات.

عندما تعاملت مع مساحة المستطيل في السنوات السابقة، استخدمت الجبر لتعطي

قاعدة عامة أو **صيغة**، في حساب المساحة:

مساحة المستطيل = الطول × العرض، أي $M = l \times w$

لاحظ أنك عندما تضرب حرفين معاً، تكتبهما متباورين دون كتابة إشارة الضرب. أي إنك تكتب lw بدلاً من $l \times w$.

لتسخدم الصيغة، عليك استبدال بعض الحروف أو جميعها بأعداد، وهذا ما يُسمى **بالتعويض**.

كتابة العبارات الجبرية

العبارة الجبرية هي مجموعة من الحروف والأعداد المرتبطة بإشارات العمليات الحسابية. يُسمى كل جزء في العبارة **حداً**.

افترض أن **متوسط أطوال الطلاب** (بالسنتيمتر) في صفك عدد مجهول، ط. تمثل طول الطالب الأطول من **المتوسط** بمقدار ١٠ سم على شكل $l + 10$ ، وطول الطالب الأقصر من **المتوسط** بمقدار ٣ سم على شكل $l - 3$

$l + 10$ ، ط - ٣ عبارتان جبريتان، لأن القيمة المجهولة تمثل بالحرف ط، ونقول إن هاتين العبارتين مكتوبتان بدلاله ط.

رابط

يظهر الجبر في كل موضوعات العلوم. تتطلب معظم المواقف في الفيزياء حركة أو تغيرات فيزيائية أخرى يمكن وصفها في صورة صيغة جبرية. فإذا كتبنا مثلاً، $Q = kT$ ، تكون قد وصفنا العلاقة بين قوة جسم وكتلته وتسارعه.

مثال ١

استخدم الجبر لكتاب عبارة جبرية بدلالة ط لكلّ ممّا يلي:

- أ طول أقلّ بـ ١٢ سم من متوسّط الطول.
- ب طول يساوي نصف متوسّط الطول.

الحلّ:

أقلّ من تعني أصغر من، أي عليك أن تطرح.
نصف يعني مقسوماً على اثنين.

$$\begin{array}{l} \text{أ } 12 - \text{ط} \\ \text{ب } \frac{\text{ط}}{2} \end{array}$$

تطبيق القواعد

يجب أن تكتب العبارات الجبرية بأقصر وأسهل طريقة ممكنة:

- تُكتب العبارة $(2 \times \text{ط})$ في صورة (2ط) والعبارة $(\text{s} \times \text{ص})$ في صورة $(\text{s}\text{ص})$
- ط يعني $(1 \times \text{ط})$ ، ولا نكتب العدد ١
- تُكتب العبارة $(\text{ط} \div 2)$ في صورة $(\frac{\text{ط}}{2})$ ، العبارة $(\text{s} \div \text{ص})$ في صورة $(\frac{\text{s}}{\text{ص}})$
- عند وجود ناتج ضرب عدد في متغير، يُكتب العدد أولاً، مثل 2ط وليس $\text{ط}2$. كما تُكتب المتغيرات عادة بالترتيب الأبجديّ، مثل $(\text{s}\text{ص})$ ، (2أب) بدلاً من $(\text{ص}\text{s})$ ، $(\text{ب}2\text{أ})$
- تُكتب العبارة $(\text{ط} \times \text{ط})$ في صورة ط^2 (مربع ط) والعبارة $(\text{ط} \times \text{ط} \times \text{ط})$ في صورة ط^3 (مكعب ط). ويعتبر العدد ٢ والعدد ٣ مثالاً على القوى أو الأسس.
- تطبق القوى على العدد أو على المتغير الذي يليها مباشرة، أي أن (أب^2) تعني $(\text{أ}^2\text{ب}^2)$
- عندما تكون القوى خارج القوسين، تطبق على كلّ ما في الداخل. مثل $(\text{s}\text{ص})^2$ تعني $(\text{s}\text{ص}) \times (\text{s}\text{ص}) \times (\text{s}\text{ص})$

يكتب الرياضيون ناتج ضرب عدد في متغير بوجود العدد أولاً تجنبًا للخلط بين الضرب والقوى. مثلاً، تكتب العبارة $\text{s} \times 5$ في صورة 5s بدلاً من $\text{s}5$ لتجنب الخلط بينها وبين s^5 .

تمارين ١-٣

١) أعد كتابة كلّ عبارة من العبارات الجبرية التالية في أبسط صورة:

- | | | | | | |
|----|--|----|--|----|-------------------------------------|
| ج | $\text{s} \times \text{ص} \times \text{ض}$ | ب | $7 \times \text{أ} \times \text{ب}$ | أ | $6 \times \text{س} \times \text{ص}$ |
| و | $\text{s} \times \text{ص} \times 12$ | هـ | $\text{أ} \times 4 \times \text{ب}$ | د | $2 \times \text{ص} \times \text{ص}$ |
| طـ | $6 \div \text{s}$ | حـ | $\text{ص} \times \text{ض} \times \text{ض}$ | زـ | $5 \times \text{ب} \times \text{أ}$ |
| لـ | $4 \times \text{s} + 5 \times \text{ص}$ | كـ | $(\text{s} + 3) \div 4$ | يـ | $4 \text{s} \div 2 \text{ص}$ |

سابقاً ►

تنكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية.
أوجد ما بداخل القوسين أولاً.

(٢) اكتب عبارة جبرية لكل مما يلي، معتبراً أن المُتغيّر هو (م):

- أ مجموع المُتغيّر مع العدد ١٣
- ب عدد أكبر من المُتغيّر بخمسة
- ج الفرق بين ٢٥ والمُتغيّر
- د مكعب المُتغيّر
- ه ثلث المُتغيّر زائد ثلاثة

| سابقًا ▶

نذكر أن 'المجموع' هو ناتج عملية الجمع.

ونذكر أيضاً أن 'الفرق' بين عددين هو ناتج عملية الطرح. الترتيب مهم في الطرح. ▶

(٣) اكتب عبارة جبرية لكل مما يلي، معتبراً أن المُتغيّر هو (س):

- أ أكثر من المُتغيّر بـ ٣
- ب أقل من المُتغيّر بـ ٦
- ج عشرة أمثال المُتغيّر
- د مجموع -8 والمُتغيّر
- ه مجموع المُتغيّر ومربعه

(٤) سعر الأسطوانة المضغوطة (CD) والأسطوانة المدمجة (DVD) س ريال عماني:

- أ إذا كان سعر الأسطوانة المضغوطة ١٠ ريالات عُمانية، فما سعر الأسطوانة المدمجة بدلالة س؟
- ب إذا كان سعر الأسطوانة المدمجة ثلاثة أمثال سعر الأسطوانة المضغوطة، فما سعر الأسطوانة المضغوطة بدلالة س؟
- ج إذا كان سعر الأسطوانة المضغوطة (س - ١٥) ريال عماني، فما سعر الأسطوانة المدمجة؟

يسمح لك الجبر بترجمة المعلومات اللفظية إلى صيغ رياضية واضحة ومحضرة. هذه استراتيجية مفيدة لحلَّ كثير من أنواع المسائل.

٢-٣ التعويض

للعبارات الجبرية قيم مختلفة تعتمد على الأعداد التي تعوض بها عن المتغيرات. لنفترض مثلاً أن كل عامل من عوامل مصنع ما يتضمن ٥ ريالات عمانية عن كل ساعة عمل. يمكنك كتابة عبارة جبرية لتمثيل أجرة كل عامل منهم في صورة $5h$, حيث h يمثل عدد ساعات العمل. إذا عملت ساعة واحدة، ستحصل على $1 \times 5 = 5$ ريالات عمانية. إذن، قيمة العبارة $5h$ هي ٥ في هذه الحالة. وإذا عملت ٦ ساعات، ستحصل على $6 \times 5 = 30$ ريالاً عمانيًا. تبلغ قيمة العبارة $5h$ في هذه الحالة ٣٠.

عند تعويض القيم، تحتاج إلى كتابة إشارات العمليات الحسابية.
 5 h تعني $5 \times h$, أي إذا كان $h = 1$ أو $h = 6$, فلا يمكنك كتابة ذلك في صورة العدد 51 أو 56

مثال ٢

$$\text{أوجد قيمة } 3(a + b) \text{ عندما } a = 2, b = 8$$

الحل:

أعد كتابة إشارات الضرب.
عوض عن قيمتي a , b .
في هذه الحالة، يمكنك إجراء خطوتين في الوقت نفسه: الضرب خارج القوسين والجمع داخلهما.
احسب الناتج.

$$\begin{aligned} 3(a + b) &= 3 \times a + 3 \times b \\ (8 + 2) \times 3 &= \\ 10 \times 3 &= \\ 60 &= \end{aligned}$$

سابقاً ▶

تحتاج إلى تذكير نفسك على الدوام بقواعد ترتيب العمليات الحسابية. ▶

رابط 🔗

يُحتمل ألا تفكّر في الجبر عندما تراقب الرسوم المتحركة، أو عندما تدخل صوراً في رسائلك الإلكترونية، أو عندما تلعب لعبة إلكترونية على هاتفك أو حاسوبك، لكن مصممي الصور المتحركة يستخدمون موضوعات جبر معقّدة لتحريك تلك الأشياء على الشاشة.

مثال ٣

$$\text{أكمل جدول القيمة للصيغة } b = 3 - 3a$$

٣	٢	١	٠	(١)
				(٢)

الحل:

$$\begin{aligned} \text{عوض قيمة } a \text{ لتجد قيمة } b. \\ 3 - = 3 - 0 = 3 - 0 \times 3 \\ 0 = 3 - 3 = 3 - 1 \times 3 \\ 3 = 3 - 6 = 3 - 2 \times 3 \\ 6 = 3 - 9 = 3 - 3 \times 3 \end{aligned}$$

٣	٢	١	٠	(١)
٦	٣	٠	٣-	(٢)

ćمارين ٢-٣

(١) أوجد قيمة كل عبارة جبرية عندما تكون $s = 3$ في كل مما يلي:

- | | | |
|--------------|---------------|-------------|
| ج $4s - 2$ | ب $10s$ | أ $3s$ |
| و $10 - s$ | ه $2s^2$ | د s^2 |
| ط $2(s - 1)$ | ح $s^2 + s^2$ | ز $7 + s^2$ |

$$\begin{array}{r} \frac{7}{2}س \\ \frac{4}{3}س \\ \frac{10}{6}س \\ \hline ن \\ \frac{(2س+4س)}{7} \end{array}$$

(٢) أوجد قيمة كل من العبارات الجبرية التالية عندما تكون $A = 3$ ، $B = 5$ ، $C = 2$:

- | | | | | | |
|----|-------------------------------|----|-------------------|----|-------------------|
| أ | $A + 2C$ | ب | $A - B$ | ج | $A + BC$ |
| د | $3B - 2(A + C)$ | هـ | $A + 2(C + B)$ | | |
| ز | $A + B + C + AB$ | حـ | $2(A + B)$ | | |
| يـ | $(B - C) + (A + C) - (B - C)$ | لـ | $A + B$ | | |
| سـ | $\frac{A + B}{C}$ | نـ | $\frac{A + B}{C}$ | مـ | $\frac{B + C}{A}$ |
| صـ | $\frac{A + B}{C}$ | فـ | $\frac{A + B}{C}$ | عـ | $\frac{B + C}{A}$ |

يبين على الدوام خطوات التمويض بوضوح. اكتب الصيغة أو العبارة في صورتها الجبرية بعد تبديل الحروف بالأعداد المناسبة. يبين ذلك لمعلمك أو لك وأنك قد وضعت الأعداد الصحيحة في الأماكن المناسبة.

(٣) أوجد قيمة S في كل مما يلي عندما تكون:

$$(1) S = 0 \quad (2) S = 2 \quad (3) S = 3 \quad (4) S = 4 \quad (5) S = 10$$

- | | | | | | |
|----|---------------------|----|----------------|----|-------------------|
| أ | $S = 100 - S$ | بـ | $S = 3S + 1$ | جـ | $S = 100 - S$ |
| دـ | $S = \frac{S}{2}$ | هـ | $S = S^2$ | وـ | $S = \frac{S}{2}$ |
| زـ | $S = 2(S + 2) - 10$ | حـ | $S = 2(S + 2)$ | طـ | $S = 3S^2$ |

(٤) يبلغ سعر الفطيرة الواحدة ٣ ريالات عُمانية، وسعر صندوق العصير ريالين عُمانيين:

أ) اكتب عبارة تُبيّن السعر الكلي لشراء S فطائر، S صناديق عصير.

بـ) أوجد السعر الكلي لكل من الآتي:

(١) أربع فطائر وثلاثة صناديق عصير.

(٢) فطيرة و٢٠ صندوق عصير.

(٣) ١٠٠ فطيرة و٢٥ صندوق عصير.

(٥) صيغة محيط المستطيل هي $H = 2(T + U)$ ، حيث يمثل T طول المستطيل ويمثل عرضه. أوجد محيط المستطيل عندما يكون:

- | | |
|----|--|
| أ | طول المستطيل ١٢ سم وعرضه ٩ سم. |
| بـ | طول المستطيل ٢٠,٥ م وعرضه ١,٥ م. |
| جـ | طول المستطيل ٢٠ سم وعرضه نصف طوله. |
| دـ | عرض المستطيل ٢ سم وطوله مُكَعَّب عرضه. |

٣-٣ تبسيط العبارات الجبرية

تُسمى أجزاء العبارة الجبرية حدوداً. تفصل بين كل حدين إحدى الإشارتين + أو - .
 (أ + ب) عبارة جبرية تتالف من حدين، ولكن (أ ب) عبارة جبرية تتالف من حد واحد فقط، و(٢ + ب - ج) عبارة جبرية تتالف من ثلاثة حدود.

٣-١ جمع الحدود المتشابهة وطرحها

تُسمى الحدود التي تتضمن المُتغيّرات والأسس المرتبطة بها حدوداً متشابهة. (٢أ) و (٤أ)
 حدين متشابهان؛ (٣س ص) و (-س ص) حدان متشابهان.

لكي تكون الحدود متشابهة، يجب أن تكون المُتغيّرات والأسس المرتبطة بها متماثلة.
 لا تنس أن المُتغيّرات المكتوبة بترتيب مختلف تعني الشيء نفسه، لذا، فإن (س ص)
 و(ص س) هما حدان متشابهان ($s \times c = c \times s$).
 يمكن جمع الحدود المتشابهة وطرحها لتبسيط العبارات الجبرية.

تذكّر أن الإشارتين × ، ÷ لا تفصلان بين الحدود. تذكّر أيضًا أن شرطة الكسر تعني القسمة، أي إن أجزاء الكسر جميعها تحسب حداً واحداً، حتى وإن وجدت إشارات +، - في البسط أو المقام.
 وبناءً على ذلك فإن $\frac{أ + ب}{ج} \div ح$ واحد.

تذكّر أن العدد في الحد يُسمى معاملًا. المعامل في الحد ٢ أ هو العدد ٢، وفي الحد -٣ أ ب هو -٣.
 الحد المكون من أعداد فقط يُسمى الثابت. إذن، الثابت في العبارة $٤ + ٤$ هو العدد ٤

مثال ٤

بسط كلاً من مما يلي:

$$أ) ٤ + ٦ب + ٣ + ٥ك - ٧ق \quad ب) ٢ق + ٥ك + ٣ - ٦ب \quad ج) ٢أب + ٣أب - ٣أب + ٤أب$$

الحل:

عين الحدود المتشابهة (٤أ، ٣).
 اجمع معالمي الحدين المتشابهين.
 اكتب الحدود بالترتيب الأبجدي.

$$أ) ٤ + ٦ب + ٣ =$$

عين الحدود المتشابهة (٢ق، -٧ق، ٥ك، ٣ك).
 اجمع المعاملات واطرحها.
 اكتب الحدود.

$$ب) ٢ق + ٥ك + ٣ - ٧ق = -٥ق + ٨ك$$

عين الحدود المتشابهة؛ انتبه للحدود التي تتضمن التربيع لأن أ، أ٢ ليسا متشابهين.
 تذكّر أن أب يعني أب.

$$ج) ٢أب + ٣أب - أب + ٣أب = أب + ٣أب + ٣أب - أب = ٦أب$$

لاحظ أن إشارة +، أو إشارة -، التي تظهر في العبارة الجبرية ترافق الحد الموجود إلى يسارها.
 فمثلاً: تتضمن العبارة ٣س - ٤ص حدين هما ٣س و -٤ص. إذا لم يسبق الحد أي إشارة، عندئذ تعتبر إشارته '+،

لاحظ أنك تستطيع إعادة تنظيم الحدود شرط أن تتنكّر أن تأخذ إشارتي الـ -، والـ +، مع الحدود الموجودة إلى يسارهما. مثلاً:
 $3s - 2c + 5u = 3s + u - 2c = 5u + 3s - 2c = -2c + 3s + 5u$

تمارين ٣-٣-١

(١) عيّن الحدود المُتشابهة في كلّ مجموعة من المجموعات التالية:

- | | | | |
|---|------------------------------|----|--------------------|
| ب | $س - 3ص + \frac{3}{2}ص - 5ص$ | أ | $س - 2ص + 4ص - 6ص$ |
| د | $2 - 2س + 3س - 3ص$ | ج | $ب - 4ب + 4ب - 2ب$ |
| و | $-2س - 2ص + 3س - 3ص$ | هـ | $5، 16، 15، 5$ |

(٢) بسط كلاً ممّا يلي من خلال جمع الحدود المُتشابهة أو طرحها:

- | | | | |
|----|-----------------|----|---------------|
| ب | $س - 2س$ | أ | $6ص + 2ص$ |
| د | $2س + س$ | ج | $3س + س$ |
| و | $4ص - 4ص$ | هـ | $2س - 7س$ |
| ح | $ص - 4ص$ | ز | $10س - 9س$ |
| ي | $9ص - 2ص$ | طـ | $س - 5س$ |
| لـ | $4س - س$ | كـ | $2ك - 4ك$ |
| نـ | $ص^2 - 4ص$ | مـ | $2س^2 - 4س^2$ |
| عـ | $14ب^2 - 12ب^2$ | سـ | $2ص^2 - 4ص^2$ |
| صـ | $10ص^2 - 8ص^2$ | فـ | $4س^2 - 9ص^2$ |

للحـما

يُفترض أن تكون قادرًا على تبسيط العبارات الجبرية عند حل المعادلات والمتباينات، وعند تبسيط العبارات الجبرية في دراستك للجبر.

(٣) بسط كلاً ممّا يلي:

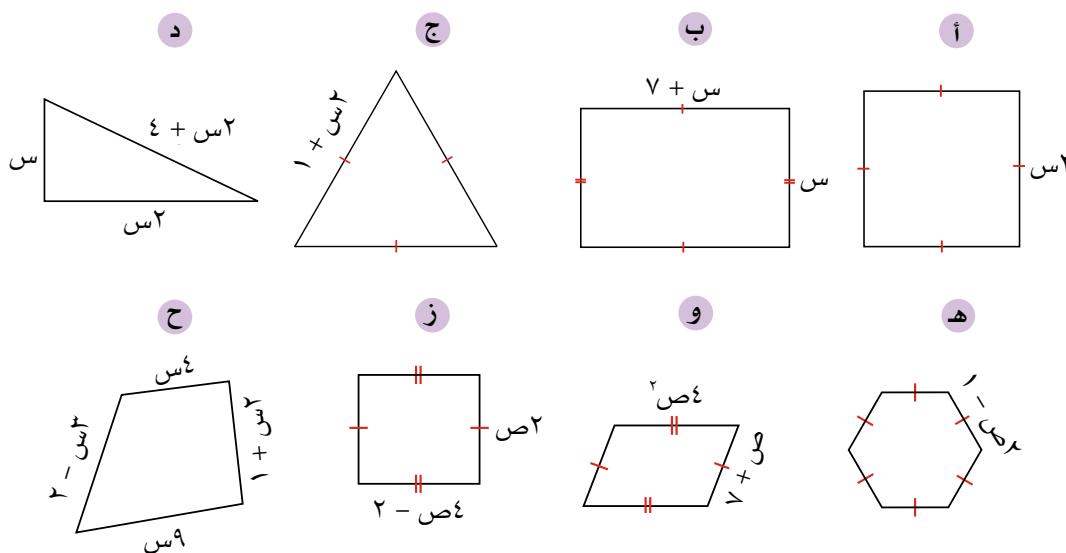
- | | | | |
|----|-----------------------|----|----------------------|
| بـ | $4ص - 2ص + 4س$ | أـ | $2س + ص + 3س$ |
| دـ | $10 + 4س - 6$ | جـ | $4س - 4س + 5س$ |
| وـ | $5س^2 - 6س^2 + 2س$ | هـ | $4س - 2ص + 2س - 4س$ |
| حـ | $3ص + 4س - س$ | زـ | $5س + 4ص - 4س$ |
| يـ | $9س - 2ص - س$ | طـ | $4س + 6ص + 4س$ |
| لـ | $12س^3 - 4س^3 + 2س^3$ | كـ | $2س^3 - 4س^3 + 4س^3$ |
| نـ | $س - 2س + 7س$ | مـ | $5س - 2س + 7س$ |
| عـ | $5س^2 - 3س^2 - 2س^2$ | سـ | $3س^2 - 2ص^2 - 4س^2$ |
| صـ | $5س - 2 + س$ | فـ | $4س - س + 2ص$ |

٤) بسيط العبارات الجبرية في كل مما يلي:

- | | | | |
|---|-----------------------|----|--|
| ب | $s^2 - 4s + 3s^2 - s$ | أ | $8s - 4 - 6s - 4$ |
| د | $s^2 + 2s + 3s - 7$ | ج | $5s + s + 2s + 3s - 7$ |
| و | $s^2 + 3s - 7 + 2s$ | هـ | $s^2 - 4s - s + 3$ |
| | | ز | $2s \text{ ص ع} - 3s \text{ ص} + 2s \text{ ع} - s \text{ ص ع}$ |
| | | حـ | $5s \text{ ص} - 4 + 3 \text{ ص س} - 6$ |
| | | طـ | $8s - 4 - 2s - 3s$ |

٥) اكتب عبارة جبرية لمحيط (ح) كل شكل، ثم بسطها لتعطي (ح) في أبسط صورة

ممكنة:



٣-٣-ب ضرب العبارات الجبرية وقسمتها

رغم أن الإشارتين \times ، \div لا تفصلان بين الحدود، لا تزال العبارة الجبرية بحاجة إلى كتابتها في أبسط صورة ممكنة ليسهل التعامل معها.

مثال ٥

بسيط كلاً مما يلي:

ب) $4ab \times 2b^2 c$ أ) $4s \times 3sc$

الحل:

أدخل إشارات \times المفقودة.

اضرب الأعداد.

اكتب الحد في أبسط صورة.

أ) $4s \times 3sc = 4 \times s \times 3 \times c$

$= 12 \times s \times c$

$= 12sc$

أدخل إشارات \times المفقودة.
اضرب الأعداد ثم اضرب
المتغيرات.
اكتب في أبسط صورة.

ب

$$\begin{aligned} 4ab \times 2b &= 4 \times a \times b \times 2 \times b \times j \\ &= 8ab \times b \times j \\ &= ab^2j \end{aligned}$$

يمكنك ضرب الأعداد أولاً، ثم
المتغيرات ثانياً، لأن بالإمكان
عكس الترتيب في الضرب دون
أن تتغير الإجابة.

مثال ٦

بسط كلاً مما يلي:

ب

$$\frac{2}{3}s \times \frac{4}{5}s$$

أ

$$\frac{12}{3}s^2$$

الحل:

اقسم البسط والمقام على ٣ (إن جعل
البسط والمقام أصغر، حتى يصبح
الكسر في أبسط صورة، يُسمى
تبسيط).
بسط ثم اضرب.

أ

$$\frac{12s^2}{3s} = \cancel{12}^4 \cancel{s}^1 \times \frac{s}{\cancel{3}^1} = 4s^2$$

اضرب أولاً ثم بسط.

بسط أولاً ثم اضرب.

ب

$$\frac{2}{3}s \times \frac{4}{5}s = \frac{2 \times s \times 4 \times s}{3 \times 5}$$

$$\frac{\cancel{2}^1 s}{\cancel{5}^1} =$$

$$\frac{4}{3}s^2 =$$

$$\text{أو } \frac{1}{3}s \times \frac{4}{5}s = \frac{1}{3}s \times \cancel{4}^1 s = \frac{4}{15}s^2$$

تمارين ٣-٣-ب

أوجِد ناتج ضرب كلاً مما يلي:

ج

$$4m^3 \times 4$$

و

$$6s \times 3s$$

ط

$$4s^2 \times 2s$$

ل

$$4s \times 2s \times 3s$$

س

$$6ab \times 2$$

ص

$$12s^2 \times 2 \times 8s^2$$

ب

$$4s \times 2$$

هـ

$$4s \times 2s$$

حـ

$$2s \times 3s \times 2$$

كـ

$$9s \times 3s$$

نـ

$$3ab \times 4b$$

فـ

$$4 \times 2ab \times 3$$

أ

$$2 \times 6s$$

دـ

$$2s \times 3s$$

زـ

$$8s \times 3u$$

يـ

$$4s \times 2s$$

مـ

$$2a \times 4a$$

عـ

$$8ab \times 2ab$$

(٢) بسط كلاً ممّا يلي:

- | | | | |
|----|---|----|--|
| ب | $5 \times 2 \times 3$ | أ | $3 \times 2 \times 4$ |
| د | $س \times ص \times ع \times س$ | ج | $2 \times 3 \times 2 \times س \times ص$ |
| و | $4 \times 2 \times 3 \times 3$ | هـ | $2 \times 2 \times 3 \times 4$ |
| حـ | $12 \times 3 \times 2 \times جـ$ | زـ | $س \times ص \times 4 \times س$ |
| يـ | $4 \times س \times 2 \times ص$ | طـ | $10 \times 2 \times 3 \times س$ |
| لـ | $4 \times 2 \times 3 \times 3$ | كـ | $9 \times س \times 2 \times س \times ص$ |
| نـ | $4 \times 2 \times 3 \times 7$ | مـ | $7 \times س \times 2 \times س \times 3 \times ص$ |
| عـ | $3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ | سـ | $9 \times س \times 3 \times 4 \times س \times ص$ |
| صـ | $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ | فـ | $9 \times س \times 2 \times س \times 3 \times س$ |

(٣) بسط كلاً ممّا يلي:

- | | | | | | | | |
|----|----------------------------|----|---------------------------|----|-------------------------------------|----|---------------------------|
| دـ | $\frac{21}{2} س \times ص$ | جـ | $\frac{21}{7} س$ | بـ | $\frac{4}{10} س$ | أـ | $\frac{15}{3} س$ |
| حـ | $\frac{15}{10} س \times ص$ | زـ | $\frac{10}{4} س \times ص$ | وـ | $\frac{18}{9} س \times ص$ | هـ | $\frac{14}{2} س \times ص$ |
| لـ | $\frac{9}{3} س$ | كـ | $\frac{8}{4} س$ | يـ | $\frac{7}{14} س \times ص \times ضـ$ | طـ | $\frac{7}{14} س \times ص$ |

(٤) بسط كلاً ممّا يلي:

- | | | | |
|----|-----------------------------|----|----------------------------|
| بـ | $12 \times س \times 2$ | أـ | 8×2 |
| دـ | $24 \times س \times 3$ | جـ | $16 \times س \times 4$ |
| وـ | $24 \times س \times 8$ | هـ | $14 \times س \times 2$ |
| حـ | $9 \times س \times 36$ | زـ | $8 \times س \times 24$ |
| يـ | $\frac{45}{20} س \times ص$ | طـ | $\frac{77}{11} س \times ص$ |
| لـ | $\frac{100}{25} س \times 3$ | كـ | $\frac{60}{15} س \times 3$ |

(٥) بسط العبارات الجبرية في كل ممّا يلي:

- | | | | | | |
|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|
| جـ | $\frac{5}{2} س \times ص$ | بـ | $\frac{3}{4} س \times ص$ | أـ | $\frac{2}{3} س \times ص$ |
| وـ | $\frac{5}{2} س \times 2$ | هـ | $\frac{2}{4} س \times 3$ | دـ | $\frac{5}{3} س \times ص$ |
| طـ | $\frac{5}{5} س \times 5$ | حـ | $\frac{3}{3} س \times ص$ | زـ | $\frac{2}{5} س \times ص$ |
| لـ | $\frac{5}{2} س \times 4$ | كـ | $\frac{3}{6} س \times 2$ | يـ | $\frac{2}{3} س \times 4$ |

٤-٣ التعامل مع الأقواس

٤-٣-١ فك الأقواس

عندما تتضمن العبارة الجبرية أقواساً، عليك التخلص من الأقواس قبل أن تبسط العبارة. يُسمى ذلك فك الأقواس (الضرب خارج الأقواس).

لتخلص من الأقواس، اضرب كل حد داخل القوس في العدد (أو المُتغّير أو كليهما) خارج القوس. عندما تقوم بذلك عليك الانتباه للإشارات الموجبة والسلبية التي تقع قبل الحدود:

$$\begin{aligned} \text{س}(ص + ع) &= \text{س ص} + \text{س ع} \\ \text{س}(ص - ع) &= \text{س ص} - \text{س ع} \end{aligned}$$

مثال ٧

فك الأقواس لتبسيط العبارات التالية:

- أ** $2(2s + 6)$ **ب** $4(7 - 2s)$
ج $2s(s + 3c)$ **د** $s(s^2 - 3s^3)$

يعتبر فك الأقواس مجرد عملية ضرب، لذا يمكنك أن تطبق على هذه الأمثلة القواعد نفسها التي استخدمتها من قبل في الضرب.

الحل:

اتبع الخطوات الآتية عند الضرب في حد خارج القوسين:

- اضرب الحد الذي يقع على اليمين داخل القوسين أولاً، كما هو موضح بالسهم الأحمر المسمى (١).
- ثم اضرب الحد الذي يقع إلى اليسار داخل القوسين، كما هو موضح بالسهم الأزرق المسمى (٢).
- اجمع أو اطرح الناتجين (١) و(٢).

أ $(1) \quad 6 \times 2 = 12$
 $(2) \quad 6 \times 2s + 6 \times 6 = 12s + 36$

ب $(1) \quad 4 \times 7 = 28$
 $(2) \quad 4 \times -2s = -8s$
 $28 - 8s = -8s + 28$

ج $(1) \quad s \times 3c = 3sc$
 $(2) \quad s \times s^2 = s^3$
 $s^3 + 3sc = s^3 + 3sc$

د $(1) \quad s \times -3s^3 = -3s^4$
 $(2) \quad s \times s^2 = s^3$
 $s^3 - 3s^4 = -3s^4 + s^3$

تمارين ٤-٣-١

(١) فُكَ الأقواس في كل ممّا يلي:

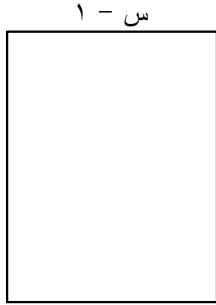
- | | | | | | |
|----|--------------|----|--------------|----|--------------|
| ج | $4(2s + 3)$ | ب | $3(s + 2)$ | أ | $2(s + 6)$ |
| و | $3(2s - 3)$ | هـ | $4(s - 2)$ | د | $10(s - 6)$ |
| طـ | $6(s + 4)$ | حـ | $6(4 + s)$ | زـ | $5(s + 4)$ |
| لـ | $2(3s - 2s)$ | كـ | $2(s - 2s)$ | يـ | $7(2s - 2s)$ |
| سـ | $6(3s - 2s)$ | نـ | $5(2s - 2s)$ | مـ | $2(s - 2s)$ |
| صـ | $7(4s + s)$ | فـ | $4(s - 4s)$ | عـ | $4(s - 4s)$ |

(٢) فُكَ الأقواس في كل ممّا يلي:

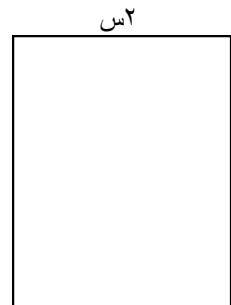
- | | | | | | |
|-----|----------------|-----|----------------|-----|----------------|
| جـ | $2s(s + 2s)$ | بـ | $3s(s - s)$ | أـ | $2s(s + s)$ |
| وـ | $3s(4s + 2s)$ | هــ | $s(s - 2s)$ | دـ | $4s(3s - 2s)$ |
| طــ | $2s(9 - 4s)$ | حــ | $2s^2(3 - 2s)$ | زــ | $2s^2(4 - 4s)$ |
| لــ | $5s(2 - s)$ | كــ | $5s(2 - s)$ | يــ | $4s(9 - 2s)$ |
| ســ | $4s^2(s - 2s)$ | نــ | $4s^2(3 - 2s)$ | مــ | $2s^2(s - 2s)$ |
| صــ | $9s^2(9 - 2s)$ | فــ | $9s^2(9 - 2s)$ | عــ | $s^2(s - 2s)$ |

(٣) صيغة مساحة المستطيل هي $M = \text{الطول} \times \text{العرض}$. اكتب صيغة لمساحة M بدلالة s لكل من المستطيلات التالية. فُكَ العبارة لتكتب M في أبسط صورة.

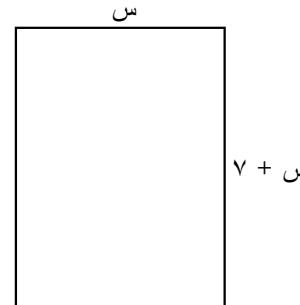
جـ



بـ



أـ



٤-٤-ب فك الحدود وتجسيدها

عند فك الأقواس، قد تنتهي بحدود متشابهة. عندها، جمّع الحدود المتشابهة معًا واجمع أو اطرح الحدود لتكتب العبارة في أبسط صورة.

مثال ٨

فك الأقواس ويسّط العبارة الجبرية حيث أمكن:

أ $6(s + 3) + 4$ ب $2(6s + 1) - 2s + 4$ ج $2s(s + 3) + s(s - 4)$

الحل:

فك الأقواس.
اجمع الحدود
المتشابهة.

$$\text{أ } 6(s + 3) + 4 = 18 + 6s + 4 \\ 22 + 6s =$$

فك الأقواس.
اجمع الحدود
المتشابهة أو اطرحها.

$$\text{ب } 2(6s + 1) - 2s + 4 = 12s + 2 - 2s + 4 \\ 10s + 2 =$$

فك الأقواس.
اجمع الحدود
المتشابهة أو اطرحها.

$$\text{ج } 2s(s + 3) + s(s - 4) = s^2 + 6s + s^2 - 4s \\ s^2 + 2s =$$

تمارين ٤-٣-ب

(١) فك الأقواس ويسّط العبارة الجبرية في كل مما يلي:

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| ب | $3(s - 2) + 4s$ | أ | $2(s + 5) + 3s$ |
| د | $4s + 2(s - 3)$ | ج | $2s + 2(s - 4)$ |
| و | $7 - (2s + 4)$ | ه | $2s(4 + s) - 5$ |
| ح | $4s + 2(2s + 3)$ | ز | $6 + 3(s - 2)$ |
| ي | $3(2s + 2) - 3s - 4$ | ط | $2s + 3 + 2(2s + 3)$ |
| ل | $7s + s(s - 4) - 4$ | ك | $6s + 2(s + 3)$ |
| ن | $2s(2s - 2s + 4)$ | م | $2s(s + 4) - 4$ |
| ع | $3s(2s + 4) - 9$ | س | $2s(5 - 4s) - 4s^2$ |
| ص | $2(s - 1) + 4s - 4$ | ف | $3s(s + 2) - 4s^2$ |

(٢) بسيط العبارات التالية بفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة:

- أ $4(s + 40) + 2(s - 3)$
- ب $2(s - 3) + 2(s + 2)$
- ج $5(s + 2) + 4(s + 3)$
- د $8(s + 10) - 2(s + 4)$
- ه $4(s^2 + 2) + (4 - s^3)$
- و $4s(s + 1) + 2s(s + 3)$
- ز $3s(4s - 4) + 4(3s^3s + 4s)$
- ح $2s(5s - 4) + 2(6s - 4s^2)$
- ط $3s(4 - 8s) + 3(2s^2s - 5s)$
- ي $3(6s - 4s) + s(2 - 2s)$
- ك $3s^2(4 - s) + 2(s^5 - 2s^3)$
- ل $s(s - s) + 3(2s - s)$
- م $4(s - 2) + 3s(4 - s)$
- ن $s(s + s) + s(s - s)$
- س $2s(s + s) + 2(s^3 + 3s^2s)$
- ع $s(2s + 5) + (3 - 2s)$
- ف $4(2s - 3) + (s - 5)$
- ص $3(4s^2s - 2s) + 5(s^3s - s^2s)$

٥-٣ الأسس

أصبحت الآن تعرف كيف تكتب القوى الثانية والثالثة باستخدام الأسس:

$$5^2 = 5 \times 5, \quad \text{ص}^2 = \text{ص} \times \text{ص}$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5, \quad \text{ص}^3 = \text{ص} \times \text{ص} \times \text{ص}$$

جمع 'أس' هو 'أسس'

عندما تكتب عدداً باستخدام الأسس (القوى)، تكون قد كتبته بالصيغة **الأُسّية**. يمكن لأي من الأعداد أن يستخدم كأس، بما فيها الصفر والأعداد الصحيحة السالبة، والكسرات. يخبرك الأسّ عن عدد المرات التي تم فيها ضرب الأساس في نفسه. أي إن:

$$a^0 = a \times a \times a = a$$

القوى تعبير آخر عن 'الأسس'. يمكن إحلال أحدهما محل الآخر، لكن تعبير 'الأس' مستخدم أكثر في هذا الكتاب.

مثال ٩

اكتب كلّ عبارة مُستخدِمًا الصيغة **الأُسّية**:

أ $s \times s \times s \times s$ **ب** $s \times s \times s \times s \times s \times s$

الحلّ:

أوجد عدد المرات التي تم فيها ضرب س في نفسه، ليعطيك قيمة الأساس.

أ $s \times s \times s = s^3$

أوجد عدد المرات التي تم فيها ضرب س في نفسه، ليعطيك قيمة الأساس للمتغير س، ثم أوجد قيمة الأساس للمتغير ص باستخدام الطريقة نفسها.

ب $s \times s \times s \times s \times s \times s = s^6$

عندما تكتب القوى في صورة ناتج ضرب، فإنك تكتبها بالصيغة التفصيلية.

٥-٤ قوانين الأسس

تُعدّ قوانين الأسس من القوانين المهمّة جدّاً في الجبر، لأنها تدلّك على طرائق سريعة لتبسيط العبارات الجبرية. سوف تستخدم هذه القوانين أكثر فأكثر كلما تعمّقت في تعلم الجبر. لذا من المهم أن تفهم تلك القوانين وأن تكون قادرًا على تطبيقها في مواقف مختلفة.

جمع الأساس

انظر إلى عمليّتي الضرب التاليتين:

$$3^4 \times 3^2, \quad s^4 \times s^2$$

في عملية الضرب الأولى، 'الأساس' هو ٣، وفي عملية الضرب الثانية 'الأساس' هو س.

أنت تعرف من قبل أنك تستطيع تبسيط هاتين العمليتين عبر تفكيرهما على النحو الآتي:

$$\begin{array}{c} \text{س}^3 \quad \times \quad \text{س}^4 \\ \hline \text{س}^7 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \quad \times \quad 3 \quad \times \quad 3 \quad \times \quad 3 \\ \hline 63 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \quad \times \quad 2 \\ \hline 4 \end{array}$$

طريقة أخرى:

$$7 \times 3 = 4 + 3 = 7$$

يقود ذلك إلى قانون ضرب الأسس:

عندما تضرب عبارات أسيّة لها الأساس نفسه، يمكنك جمع الأسس: $\text{س}^m \times \text{س}^n = \text{س}^{m+n}$

مثال ١٠

بسط كلاً مما يلي:

ج $2\text{s}^2\text{c} \times 3\text{s}^3\text{c}$

ب $\text{s}^2 \times \text{s}^3$

أ 65×25

الحل:

اجمع الأسس.

أ $65 \times 65 = 6^{2+2} = 6^4$

اجمع الأسس.

ب $\text{s}^2 \times \text{s}^3 = \text{s}^{2+3} = \text{s}^5$

اضرب الأعداد
أولاً، ثم اجمع أسس
المتغيرات المتشابهة.

ج $2\text{s}^2\text{c} \times 3\text{s}^3\text{c} = 2 \times 3 \times \text{s}^{2+3} \times \text{c}^{1+1} = 6\text{s}^5\text{c}^2$

تذكّر عندما يكون أساس العدد (١)
فإنه عادة لا يكتب. إذن، س تعني
س١ وص تعني ص١.

طرح الأسس

انظر إلى عمليّي القسمة التاليّتين:

$$2^3 \div 2^2, \quad \text{s}^7 \div \text{s}^2$$

أنت تعرف من قبل أنك تستطيع تبسيط هاتين العبارتين بعد كتابتهما بالصورة

التفصيلية، ثم تبسيطهما كما يأتي:

$$\begin{array}{rcl} \text{s}^6 \times \text{s}^5 \times \text{s}^4 \times \text{s}^3 \times \text{s}^2 & & 3 \times 3 \times 2 \times 2 \\ \text{s}^6 \times \text{s}^5 & & 3 \times 2 \\ & & = 6 \\ & & = \text{s}^6 \end{array}$$

طريقة أخرى:

$$3 \div 2 = 2^{-1}, \quad \text{s}^7 \div \text{s}^2 = \text{s}^{7-2} = \text{s}^5$$

يقود ذلك إلى قانون قسمة الأسس:

عندما تقسم عبارات أسيّة لها الأساس نفسه، يمكنك طرح الأسس: $\text{s}^m \div \text{s}^n = \text{s}^{m-n}$

مثال ١١

بسط كلاً مما يلي:

ج) $\frac{s^0}{s^5}$

ب) $\frac{s^3}{s^6}$

أ) $s^2 \div s^0$

الحل:

اطرح الأسس.

أ) $s^7 \div s^2 = s^{7-2} = s^5$

اقسم (بسط) المعاملات. اطرح الأسس.

ب) $\frac{s^6}{s^3} = \frac{1}{2} \times \frac{s^0}{s^{-3}} = 2s^3$

اقسم المعاملات.

ج) $\frac{s^0}{s^5} = \frac{1}{5} \times \frac{s^3}{s^0} \times \frac{s^0}{s^{-2}}$

اطرح الأسس.

$= 2s^2$

تذكّر أن «المعامل» هو العدد الذي يقع إلى جانب المتغير في الحد.

الأسس صفر (٠)

يجب أن تذكّر أن ناتج قسمة أي قيمة على نفسها يساوي ١

لذا فإن $3 \div 3 = 1$ ، $s \div s = 1$ ، $\frac{s^4}{s^4} = 1$

إذا استخدمنا قانون قسمة الأسس، سنرى أن:

$$\frac{s^4}{s^4} = s^{4-4} = s^0$$

يقود ذلك إلى قانون الأسس (٠):

أي قيمة مرفوعة إلى الأسس (٠) تساوي ١ . إذن، $s^0 = 1$

تقنياً، هناك استثناء لهذا القانون عندما تكون $s = 0$ وإلى الآن نقول إن 0^0 غير معرف.

قانون قوى القوى

انظر إلى المثالين الآتيين:

$$(s^2)^3 = s^{2 \times 3} = s^{2+2+2} = s^6$$

$$(2s^3)^4 = 2^4 \times s^{3 \times 4} = 16s^{12}$$

عند كتابة المثالين في الصورة التفصيلية، يمكن ملاحظة أن $(s^2)^3 = s^6$ وأن $(2s^3)^4 = 16s^{12}$

يقود ذلك إلى قانون قوى القوى:

عندما نرفع قوى إلى قوى أخرى، فإننا نضرب الأسس: $(s^m)^n = s^{mn}$

مثال ١٢

بسط كلاً مما يلي:

أ) $(s^3)^6$

ب) $(s^3 \cdot s^2)^2$

ج) $(s^3)^4 \div (s^6)$

الحل:

اضرب الأسس.

أ) $(s^3)^6 = s^{6 \times 3}$

$= s^{18}$

اضرب الأس الخارجي في الأس الداخلي لكل معامل ومتغير للتخلص من الأقواس، واضرب الأسس.

ب) $(s^3 \cdot s^2)^2 = s^{2 \times 3} \times s^{2 \times 2} \times s^2 = s^9$

فك الأقواس أولاً عبر ضرب الأسس.

ج) $(s^3)^4 \div (s^6) = s^{4 \times 3} \div s^{6 \times 1} = s^{12} \div s^{12} = s^{12-12} = s^0 = 1$

اطرح الأسس.

الخطأ الشائع هنا هو عدمأخذ الأس للحدود العددية. مثلاً، في الجزئية (ب)، يجب إيجاد مربع العدد 3^2 ليعطي العدد 9 .

تمارين ٣-٥-١

١) بسط كلاً مما يلي:

أ) $s^3 \times s^4$ ب) $s^4 \times s^8$ ج) $s^4 \times s^8$

هـ) $s^2 \times s^3$ وـ) $s^3 \times s^4$ زـ) $s^2 \times s^3$

طـ) $s^3 \times s^2$ يـ) $s^3 \times s^3$ كـ) $s^2 \times s^2$

مـ) $s^5 \times s^3$ نـ) $s^8 \times s^2$ سـ) $s^4 \times s^2$

٢) بسط كلاً مما يلي:

أ) $s^6 \div s^4$ ب) $s^{12} \div s^2$ ج) $s^4 \div s^2$ د) $s^3 \div s$ هـ) $\frac{s^5}{s^3}$

وـ) $\frac{s^6}{s^3}$ طـ) $\frac{s^9}{s^3}$ زـ) $\frac{s^6}{s^2}$ سـ) $\frac{s^6}{s^3}$

كـ) $\frac{s^{15}}{s^5}$ لـ) $\frac{s^9}{s^3}$ مـ) $\frac{s^3}{s^9}$ نـ) $\frac{s^3}{s^9}$ سـ) $\frac{s^3}{s^4}$

٤٣) بسط كلاً ممّا يلي:

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| ج (س ^٢) ^٢ | ب (س ^٢) ^٢ | أ (س ^٢) ^٢ |
| و (س ^٢) ^٢ | ه (س ^٢) ^٢ | د (س ^٢) ^٢ |
| ط (س ^٢) ^٢ | ح (س ^٢) ^٢ | ز (س ^٢) ^٢ |
| ل (س ^٢) ^٢ | ك (س ^٢) ^٢ | ي (س ^٢) ^٢ |
| س (س ^٢) ^٢ | ن (س ^٢) ^٢ | م (س ^٢) ^٢ |

٤) استخدم قانون الأسس المناسب لتبسيط العبارات التالية:

- | | |
|---|--------------------------------|
| ب $4 \times 2s \times 3s^2 \times 2s$ | أ $2s^2 \times 3s^2 \times 2s$ |
| د $(s^2)^3 \div (4s^3)$ | ج $4s \times s \times s^2$ |
| و $4s(s^2 + 7)$ | ه $11s^2 \times 4(a^2b)^2$ |
| ح $s^8 \div (s^3)^2$ | ز $s^2(4s - s^3)$ |
| ي $\frac{(4s^2 \times 3s^3)}{6s^4}$ | ط $7s^2s^2 \div (s^3)^2$ |
| ل $\frac{s^8 \times (s^2)^3}{(2s^2)^4}$ | ك $\frac{(s^2)^3}{(s^2)^2}$ |
| ن $4s^2 \times 2s^2 \div (2s)$ | م $(8s^2)^2$ |
| | س $\frac{(4s^2)^2}{(2s^2)^2}$ |

عند وجود مزيج من المعاملات والمتغيرات، تعامل مع المعاملات أولاً، ثم طبق قوانين الأسس على المتغيرات، مراعياً الترتيب الأبجدي.

٤-٥-٢-ب الأسس السالبة

درست سابقاً أن بالإمكان استخدام الأعداد السالبة للتعبير عن الأسس. ولكن ماذا يعني عندما يكون الأسس سالباً؟

انظر إلى الطريقيتين المعروضتين أدناه لإيجاد $s^2 \div s^5$.

استخدام قانون قسمة الأسس:

$$s^2 \div s^5 = s^{-3}$$

$$= s^{-2}$$

استخدام الصورة التفصيلية:

$$\begin{aligned} s^2 \div s^5 &= \frac{s \times s \times s}{s \times s \times s \times s \times s} \\ &= \frac{1}{s \times s} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

يُثبت ذلك أن $\frac{1}{s^2} = s^{-2}$. ويعطي أيضاً قاعدة للتعامل مع الأسس السالبة:

$$s^{-m} = \frac{1}{s^m} \quad (\text{حيث } s \neq 0)$$

عندما تختفي العبرة أنسانياً سالبة، طبق قوانين الأسس الأخرى نفسها لتبسيطها.

بلغة مباشرة، يمكن القول إن العدد المعرف إلى أس سالب يساوي ١ مقسوماً على العدد مرفوعاً إلى الأس الموجب نفسه. أي يمكن كتابة b^{-2} في صورة مقلوب b^2 ، أي $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$.

مثال ١٣

لاحظاً

هذه أمثلة بسيطة. عندما تتعلم أكثر عن التعامل مع الأعداد الموجّهة لاحقاً، ستُطبّق ما تعلّمته لتبسيط عبارات أكثر تعقيداً.

- (١) أوجد قيمة كلّ مما يلي:
 ب ١-٥ أ ٢-٤

الحل:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = 1^{-5} \quad \text{ب} \quad \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 2^{-4} \quad \text{أ}$$

- (٢) اكتب كلاً من العبارات التالية مستخدماً أساً موجباً:
 ب ص-٣ أ س-٤

الحل:

$$\frac{1}{s^3} = s^{-3} \quad \text{ب} \quad \frac{1}{s^4} = s^{-4} \quad \text{أ}$$

- (٣) بسط كلاً مما يلي. اكتب الإجابة باستخدام أسس موجبة:
 ج $(s^3)^{-2}$ ب $s^{-2} \times s^{-3}$ أ $\frac{s^4}{s^2}$

الحل:

$$\begin{array}{l} \text{ج: } \frac{1}{(s^3)^{-2}} = s^{-3} \cdot s^{-2} = s^{-5} \\ \frac{1}{s^{-2} \times s^{-3}} = s^2 \cdot s^3 = s^5 \\ \frac{1}{s^4} = s^{-4} \end{array}$$

ćمارين ٣-٥-٣-ب

- (١) أوجد قيمة كلّ مما يلي:

أ ١-٤ ب ١-٣ ج ١-٨ د ٢-٥ ه ٢-٦ و ٥-٢

- (٢) أي جملة من الجمل الآتية صحيحة؟
 د $\frac{1}{s^{-2}} = 2^{-s}$ ج $s^{-2} = \frac{1}{s^3}$ ب $\frac{1}{16} = 2^{-8}$ أ $\frac{1}{16} = 2^{-4}$

- (٣) أعد كتابة كلّ عبارة باستخدام أسس موجبة فقط:

د 2^{-s} ج $(s^2)^{-3}$ ب s^{-2} أ s^{-2}
 ح $12s^{-3} - s^{-2}$ ز $8s^{-2} - s^{-3}$ و $7s^{-3}$ ه $12s^{-2}$

٤) بسط كلاً ممّا يلي. اكتب إجابتك باستخدام أسس موجبة فقط:

- أ) $s^{-3} \times s^4$ ب) $2s^{-2} \times 3s^{-3}$ ج) $4s^{-3} \div 12s^7$
 د) $\frac{s^{-7}}{s^3}$ ح) $\frac{s^{-2}}{s^{-4}}$ ز) $(s^{-2})^3$ و) $(2s^2)^{-3}$ ه) $(s^2)^{-3}$

٥- ج الأسس الكسرية

تطبق قوانين الأسس أيضًا عندما يكون الأس كسرًا. انظر إلى الأمثلة الآتية بعناية لدرك معنى الأسس الكسرية في الجبر:

$$\bullet s^{\frac{1}{2}} \times s^{\frac{1}{2}}$$

استخدم قانون ضرب الأسس.

$$= s^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= s^1$$

$$= s$$

لتفهم معنى $s^{\frac{1}{2}}$ ، اسأل نفسك عن العدد الذي إذا ضرب في نفسه يعطي s .

$\sqrt{s} \times \sqrt{s} = s$ ، حيث s أكبر من أو يساوي الصفر

$$\therefore s^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s}$$

$$\bullet s^{\frac{1}{3}} \times s^{\frac{1}{3}} \times s^{\frac{1}{3}}$$

استخدم قانون ضرب الأسس.

$$= s^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$= s^1$$

$$= s$$

ما العدد الذي إذا ضرب في نفسه، ثم ضرب الناتج في العدد نفسه مرة ثانية، يعطي النتيجة s ؟

$$\sqrt[s]{s} \times \sqrt[s]{s} \times \sqrt[s]{s} = s$$

$$\therefore s^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{s}$$

يبين ذلك أن أي جذر لعدد يمكن كتابته باستخدام الأسس الكسرية. $\therefore s^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{s}$

مثال ١٤

١) أعد كتابة كلّ مما يلي مُستخدِمًا رموز الجذور:

- أ) $s^{\frac{1}{2}}$ ب) $s^{\frac{1}{3}}$ ج) $s^{\frac{1}{5}}$

الحل:

ج) $s^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{s}$

ب) $s^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{s}$

أ) $s^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s}$

٤

٥

٦

٧

٢) اكتب ما يلي مستخدماً الصيغة الأسيّة:

الحلّ:

$$\frac{1}{264} = \frac{1}{243}$$

$$\frac{1}{90} = \frac{1}{9}$$

ب

أ

$$\frac{1}{(s-2)^5} = (s-2)^{\frac{1}{5}}$$

د

$$s^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{s^{\frac{1}{3}}}$$

ج

قد تتعامل أحياناً مع أسس كسرية غير كسور الوحدة، مثل $s^{\frac{1}{2}}$ أو $s^{\frac{1}{3}}$. لتجد قاعدة للتعامل مع تلك الأسس، عُد إلى قانون الأسس عند رفع القوى إلى قوى أخرى. مثلاً:

$$s^{\frac{1}{2}} = (s^{\frac{1}{2}})^2 = 2 \times \frac{1}{2}$$

$$s^{\frac{1}{3}} = (s^{\frac{1}{3}})^3 = 3 \times \frac{1}{3}$$

كسر الوحدة هو كسر بسطه (العدد في الأعلى) العدد ١. مثلاً:
 $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{7}$ ليسا كسري وحدة.

عرفت من قبل أن الأسس في صورة كسر الوحدة يتمثل بجذر. لذا يمكننا إعادة كتابة هاتين العبارتين باستخدام رموز الجذور.

$$\text{بشكل عام: } s^{\frac{1}{m}} = s^{\frac{1}{n}} \times s^{m-n} = (s^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{s})^m$$

يمكن هنا أن تعكس ترتيب الحسابات، وستكون النتيجة نفسها: $s^{\frac{1}{m}} = (\sqrt[m]{s})^m = \sqrt[m]{s^m}$ لكن الصيغة الأولى أفضل للحل.

مُلخص قوانين الأسس

- عند ضرب الحدود اجمع الأسس.
- عند قسمة الحدود اطرح الأسس.
- عند إيجاد قوى القوى اضرب الأسس.
- أي قيمة مرتفعة لقوى . تساوي ١
(حيث $s \neq 0$)

$$s^m \times s^n = s^{m+n}$$

$$s^m \div s^n = s^{m-n}$$

$$(s^m)^n = s^{mn}$$

$$s^0 = 1$$

$$s^{-m} = \frac{1}{s^m}$$

مثال ١٥

بسط كلاماً يلي:

١٥٢٥ ب

٣٢٧ أ

الحلّ:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

للعدد ٢٧

$$(\sqrt[3]{27})^3 = 3^3 = 27$$

$$(\sqrt[3]{3})^3 = 3^3 = 27$$

$$9 =$$

حول العدد العُشرِيَّ إلى كسر.
 $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ ، إذن تحتاج إلى إيجاد مكعب
 الجذر التربيعِي للعدد ٢٥

ب

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{25} &= 1.025 \\ \sqrt[3]{5} &= \\ 125 &= \end{aligned}$$

تمارين ٣-٥-ج

(١) أوجد قيمة كل مما يلي:

هـ 0.75256

دـ $\frac{2}{216}$

جـ $\frac{4}{8}$

بـ $\frac{1}{32}$

أـ $\frac{1}{8}$

(٢) بسط كلاً مما يلي:

دـ $\left(\frac{s^6}{s^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

جـ $\left(\frac{s^3}{s^6}\right)^{\frac{1}{3}}$

بـ $s^{\frac{1}{3}} \times s^{\frac{1}{3}}$

أـ $s^{\frac{1}{3}} \times s^{\frac{1}{3}}$

حـ $s^{\frac{9}{12}}$

زـ $\frac{s^2}{s^{\frac{8}{3}}}$

وـ $\left(\frac{s}{s^{\frac{7}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

هـ $s^{\frac{1}{7}}$

طـ $\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}} \div (2s^2)$ يـ $- \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}} \div (-2s^2)$ كـ $\frac{3}{4}s^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}\right)$ لـ $- \frac{1}{3}s^{\frac{1}{2}} \div (-2s^{\frac{1}{2}})$

تذَكَّر أنَّ الكلمة بسْط تعنى الكتابة في أبسط صورة. لكي تبسط

$$s^{\frac{1}{6}} \times s^{-\frac{1}{2}}$$

اكتب:

$$s^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$s^{\frac{5}{6}} - \frac{2}{12}$$

$$s^{-\frac{3}{10}}$$

$$\frac{1}{s^{\frac{3}{10}}}$$

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

=

مُلْخَص

ما يجب أن تعرفه:

- يجب أن تكون قادرًا على:
 - استخدام الحروف لتمثيل الأعداد.
 - كتابة عبارات لتمثيل المعلومات الرياضية.
 - إيجاد قيمة عبارة جبرية من خلال التعويض بأعداد محل الحروف (**المتغيرات**).
 - جمع الحدود **المتشابهة** وطرحها لتبسيط العبارات الجبرية.
 - ضرب الحدود وقسمتها لتبسيط العبارات.
 - فك العبارات بالخلص من الأقواس ومن رموز التجميع الأخرى.
 - استخدام **الأسس** الموجبة والسلبية والصفيرية وفهمها.
 - تطبيق قوانين **الأسس** لتبسيط العبارات الجبرية
 - التعامل مع **الأسس** الكسرية.

- يتضمن الجبر قوانين خاصة تسمح لنا بكتابة المعلومات الرياضية بطرق مختصرة.
- تُسمى الحروف في الجبر **متغيرات** ويُسمى العدد الذي يسبق **المتغير** **مباشرة معملاً** وتُسمى الأعداد **المنفردة** لوحدها ثوابت.
- **المتغير** حرف أو رمز يستخدم في المعادلة أو الصيغة لتمثيل عدّة قيم.
- تُسمى مجموعة الأعداد **المتغيرات حدوداً**. ويفصل بين الحدود إشارة **+**، **-**، ولا تفصل الإشارتان **×** أو **÷** بينها.
- '**الحدود المتشابهة**'، تتألف من نفس **المتغيرات** والقوى. يمكنك جمع الحدود **المتشابهة** وطرحها. ويمكنك ضرب **الحدود المتشابهة** وغير **المتشابهة** وقسمتها.
- **تطبق** قوانين ترتيب العمليات الحسابية في الجبر بالطريقة نفسها التي **تطبق** فيها على الأعداد.
- **يسْمِي التخلص من الأقواس** (**إجراء عملية الضرب**) فك **العبارة الجبرية**. ويُسمى تجميع **الحدود المتشابهة** **تبسيط** **العبارة**.
- تُسمى **القوى** أيضًا **الأسس**. ويدل **الأس** على عدد **المرّات** التي يتم فيها ضرب **المتغير** في نفسه.
- **قوانين الأسس** هي مجموعة من القواعد لتبسيط عبارات جبرية تتضمن **أسسًا**. و**تطبق** هذه **القوانين** على **الأسس الموجبة والسلبية والصفر والأسس الكسرية**.
- فك **القوسين** يعني ضرب كل **الحدود داخل القوسين** بالحد الذي يقع خارجهما.

تمارين نهاية الوحدة

١) اكتب عبارة جبرية بدلالة n لكل من الجمل التالية:

- أ مجموع عدد مع ١٢
- ب ضعف عدد ناقص أربعة
- ج مُربع ناتج ضرب عدد في العدد s
- د تكعيب مُربع عدد ما

(٢) بسط كلاً مما يلي:

أ $s^9 - s^6 + s^3 + s^2$

(٣) بسط كلاً مما يلي:

أ $\frac{a^3}{a^2} b^4$

د $(4s^2)^4$

(٤) فك كل عبارة جبرية واكتبهما في أبسط صورة:

أ $(s-2)^5 - 2s(s^2 + s^7)$

(٥) أوجد قيمة $(s+5) - (s-5)$ عندما:

أ $s = 1$

(٦) بسط واكتب الإجابات باستخدام أساس موجبة فقط:

أ $s^8 \times s^{-2}$

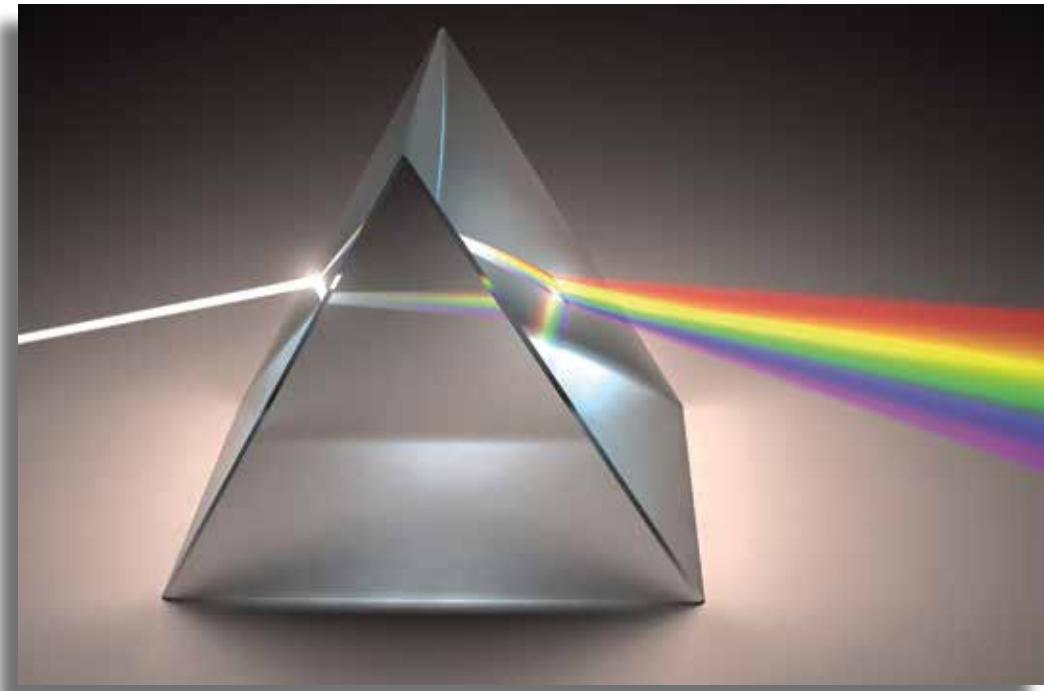
(٧) بسط علمًا بأن $s \neq 0$:

أ $s^{\frac{1}{3}} \times s^{\frac{5}{2}}$

ب $(s^6)^{\frac{1}{4}}$

ج $(s^3)^{\frac{1}{2}}$

الوحدة الرابعة: الدوائر والخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسية



في هذه الصورة، ينكسر الضوء الأبيض في المنشور الزجاجي، وينفصل إلى ألوان الطيف المختلفة. عندما يدرس العلماء خصائص الضوء، يستخدمون الرياضيات المتعلقة بالخطوط المستقيمة والزوايا.

تُعدّ الهندسة أحد أقدم مجالات الرياضيات المعروفة، فقد عرف الفلاحون المصريون القدماء الخطوط المستقيمة والزوايا، واستخدموها في رسم حدود الحقول بعد الفيضانات. واستخدم البناءون في مصر وبلاد ما بين النهرين معرفتهم بالخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسية لبناء المعابد الضخمة والأهرامات، وقام الرياضيون اليونانيون بتطوير العديد من الأساليب التي استُخدمت في هذه الوحدة.

تُستخدم الهندسة اليوم في الإنشاءات والمسح والعمارة، لتخطيط وبناء الطرق والجسور والبيوت ومجمعات المكاتب. ونحن بدورنا نستخدم الخطوط المستقيمة والزوايا، لنجد طريقنا على الخرائط، وفي برامجيات نظام تحديد المواقع العالمية (GPS)، كما يستخدم الفنانون الخطوط المستقيمة والزوايا للحصول على المنظور الصحيح في رسم اللوحات. ويستخدمها أيضًا مختصو البصريات في صنع العدسات، وحتى للاعبو البلياردو يستخدمونها لتحديد كيفية ضرب الكرات.

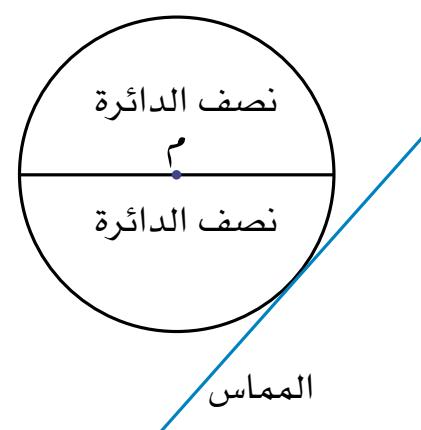
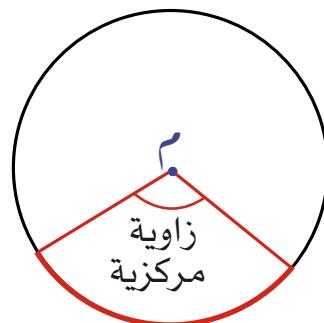
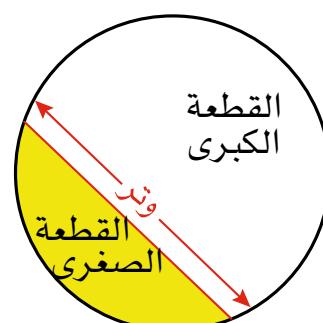
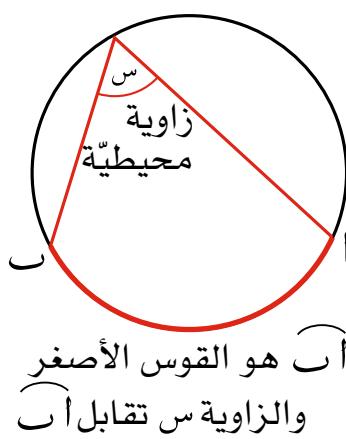
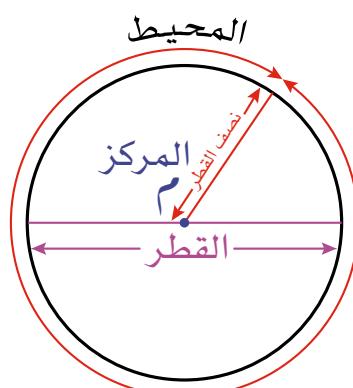
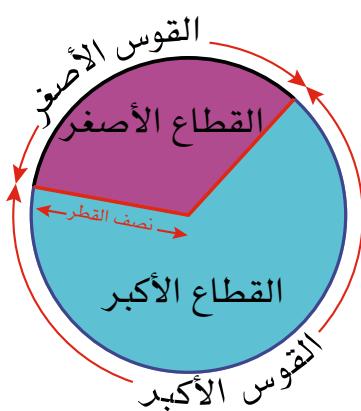
المفردات

Line	المستقيم
Parallel	التوازي
Angle	الزاوية
Perpendicular	التعامد
Acute	الحادة
Right	القائمة
Obtuse	المنفرجة
Reflex	المنكسة
Vertically opposite	المتقابلتان بالرأس
Corresponding	المتاظترتان
Alternate	المتبادلتان
Co-interior	المتحالفتان
Triangle	المثلث
Quadrilateral	الشكل الرباعي
Polygon	المضلع
Circle	الدائرة
Interior angle	الزاوية الداخلية
Exterior angle	الزاوية الخارجية
Regular	المنتظم
Irregular	غير المنتظم
Bisector	مُنْصَفُ الزاوية
Chord	الوتر
Tangent	المماس
Sector	القطاع
Arc	القوس
Radius	نصف القطر
Diameter	القطر
Inscribed angle	الزاوية المحيطية
Central angle	الزاوية المركزية
Straight angle	الزاوية المستقيمة
Revolution	الدورة الكاملة
Minor segment	القطعة الصغرى
Major segment	القطعة الكبرى

١- الدائرة

تُعرَّف **الدائرة** على أنها مجموعة من النقاط المستوية التي تبعد مسافة واحدة عن نقطة ثابتة مُعطاة تُسمى مركز الدائرة. بمعنى آخر، أن كل نقطة على الخط المنحني الخارجي للدائرة تبعد نفس المسافة عن مركز الدائرة.

أجزاء الدائرة

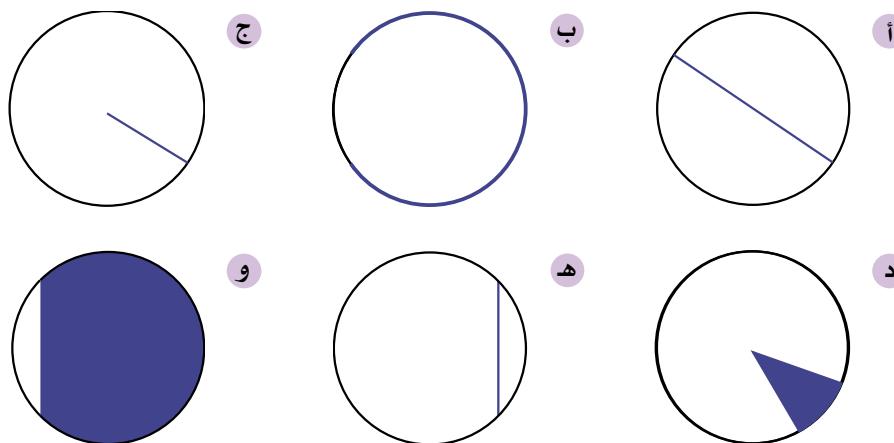


سوف تتعلم في هذه الوحدة
كيف:

- تستخدم المصطلحات الصحيحة لتحدث عن النقاط والخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسية.
- تصنف الزوايا وتقيسها وترسمها.
- تحسب قياس الزوايا المجهولة باستخدام العلاقات بين الزوايا.
- تتحدد عن خصائص المثلثات والأشكال الرباعية والدوائر والمُضلعات.
- تستخدم الأدوات الهندسية في إنشاء المثلثات.
- تحسب قياس الزوايا المجهولة في المُضلعات غير المنتظمة.

تمارين ٤-١

(١) سُمِّيَ العُنْصُرُ الْمُبَيَّنُ بِالْأَلْوَنِ الْأَذْرَقِ عَلَى كُلِّ دَائِرَةٍ فِيمَا يَلِي:



(٢) ارسم أربع دوائر صغيرة، ثم استخدم التظليل أو ارسم خطوطاً لتبيّن:

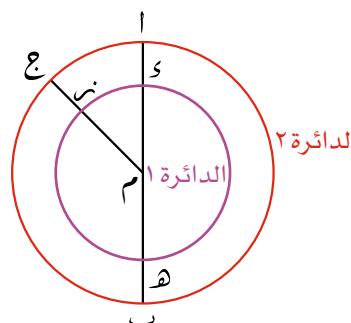
أ نصف دائرة

ب القطعة الصغرى

ج مماساً للدائرة

د زاوية ص تقابل القوس الأصغر A.

(٣) الدائرة (١) والدائرة (٢) لهما نفس المركز (M). استخدم المصطلح الصحيح أو الرموز الصحيحة لتُكمل كُلّ عبارة فيما يلي:



لاحقاً

ستتعلم أكثر عن خصائص الدوائر وخصائص الزوايا في الدوائر عندما تدرس النظريات في هندسة الدائرة.

أ M _____ في الدائرة ٢

ب K _____ في الدائرة ١

ج A _____ في الدائرة ٢

د _____ نصف قطر في الدائرة ١

ه J _____ في الدائرة ٢

و N _____ هي _____ في الدائرة ١

٢-٤ الزوايا

يستخدم الرياضيون مصطلحات وتعريفات محددة للحديث عن الأشكال الهندسية. ويتوقع منك أن تعرف معنى تلك المصطلحات، وأن تكون قادرًا على استخدامها بطريقة صحيحة خلال عملك على الأشكال الهندسية.

٤-٢-٤ قياس الزوايا

المصطلحات المستخدمة للحديث عن الخطوط المستقيمة والزوايا

المصطلح	ماذا يعني	أمثلة
النقطة	يتم عرض النقطة على الورقة بصورة (.) أو (X). بشكل عام، يستخدم كلمة نقطة لتصف تقاطع خطين مستقيمين. كما ستتحدث أيضًا عن النقاط على شبكة الإحداثيات (موقع) وتسمى تلك النقاط في صورة أزواج مُرتبة مستخدماً الإحداثيات (س، ص).	
المستقيم	المستقيم هو خط مستقيم يمتد إلى ما لا نهاية من كلا الاتجاهين، والقطعة المستقيمة هي أقصر مسافة بين نقطتين.	
التوازي	عندما تكون المسافة بين خطين مستقيمين هي نفسها دائمًا يكون الخطان متوازيين. يستخدم الرمز // للدلالة على توازي المستقيمات. مثلا، $ا // ب$. للدلالة على توازي الخطوط المستقيمة، يتم وضع أسمها على رسوماتها.	
الزاوية	تشكل الزاوية عند تقاطع شعاعين أو خطين مستقيمين في نقطة واحدة. تسمى نقطة التقاطع رأس الزاوية، ويسمى الخطان المستقيمان ضلعي الزاوية. تسمى الزوايا باستخدام ثلاثة أحرف: حرف عند نهاية أحد ضلعي الزاوية، وحرف الرأس، وحرف عند نهاية الضلع الآخر للزاوية. يدل الحرف في منتصف الزاوية على رأس الزاوية.	
التعامد	عندما يتقاطع شعاعان أو خطان مستقيمان ويشكلان زاوية قائمة، فإن كلا منهما عمودي على الآخر. يستخدم الرمز ⊥ ليبين أن الخطين المستقيمين متعمدان. مثل $م \perp ف$.	

للحظة

ستستخدم هذه المصطلحات خلال هذا العام، وخاصة في الوحدة ١٥، عندما تدرس حل المعادلات الخطية الآتية بيانياً.

رابط

تطهر الدوائر والمُضلعات في كل مكان تقريباً، بما في ذلك الرياضة والموسيقى. على سبيل المثال، فكر في الرموز المرسومة في ملعب كرة القدم، أو في اشكال الأدوات الموسيقية.



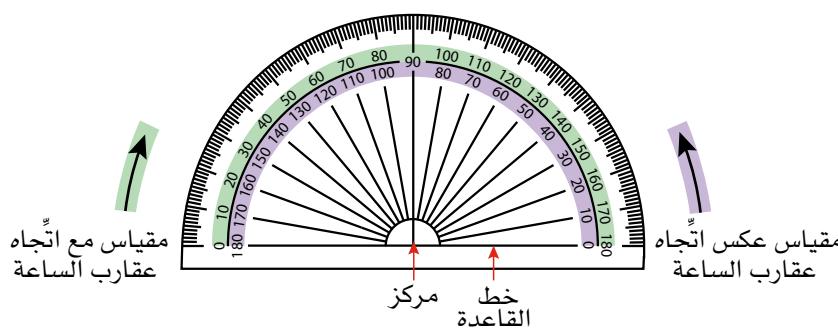
المصطلح	ماذا يعني	أمثلة
الزاوية الحادة	هي زاوية قياسها ${}^{\circ} < s < {}^{\circ} 90$	
الزاوية القائمة	هي زاوية قياسها ${}^{\circ} 90$ بالضبط. يستخدم عادة مربع ليمثل ${}^{\circ} 90$. تتشكل الزاوية القائمة بين خطين مستقيمين متعامدين.	
الزاوية المنفرجة	هي زاوية قياسها ${}^{\circ} 90 < s < {}^{\circ} 180$	
الزاوية المستقيمة	هي زاوية قياسها ${}^{\circ} 180$. ويمثل الخط المستقيم زاوية مستقيمة.	
الزاوية المُنْعَكِسَة	هي زاوية قياسها ${}^{\circ} 180 < s < {}^{\circ} 360$	
الدورة الكاملة	قياس الدورة الكاملة ${}^{\circ} 360$	

رابط

يستخدم البناؤن والمصممون والمهندسون المعماريون والمهندسون والفنانون، وحتى صناع الم gioherat ، الأشكال الهندسية والفضاء والقياس خلال تنفيذ أعمالهم. وتستخدم الكثير من هذه المهن حزماً حاسوبية لخطيط وتصميم أشياء متعددة. تبدأ أغلب التصميم في مستوى ذي بعدين على ورقة أو على شاشة، ثم تنتقل إلى ثلاثة الأبعاد للعرض النهائي. تحتاج إلى فهم جيد للخطوط المستقيمة والزوايا والأشكال الهندسية والفضاء لاستخدام حزم التصميم الحاسوبية المساعدة (CAD).

قياس الزوايا باستخدام المنقلة

قياس الزاوية هو مقدار الدوران من أحد ضلوعي الزاوية إلى الضرل الآخر. تُقياس الزاوية بالدرجات (${}^{\circ}$) من ${}^{\circ} 0$ إلى ${}^{\circ} 360$ باستخدام المنقلة.



يوجد مقياسان لمنقلة الـ ${}^{\circ} 180$. عليك اختيار المقياس المناسب عند قياس الزاوية.

قد تحتاج إلى معرفة قياس الزاوية في العمليات الحسابية، فإن أي خطأ في القياس يؤدي إلى إجابة خاطئة.

قياس الزوايا الأصغر من 180°

- ضع مركز المنقلة على رأس الزاوية.
- حاذِ خطّ القاعدة حتى يقع على أحد ضلعَي الزاوية.
- استخدم المقياس الذي يبدأ من 0° لتقرأ قياس الزاوية.
- تحرك حول المقياس حتى تصل إلى الضلع الآخر للزاوية.

إذا لم يمتد ضلع الزاوية ليصل إلى مقياس المنقلة، مدِ ضلع الزاوية ليتجاوز المقياس (طول ضلعِي الزاوية لن يؤثّر على قياس الزاوية).

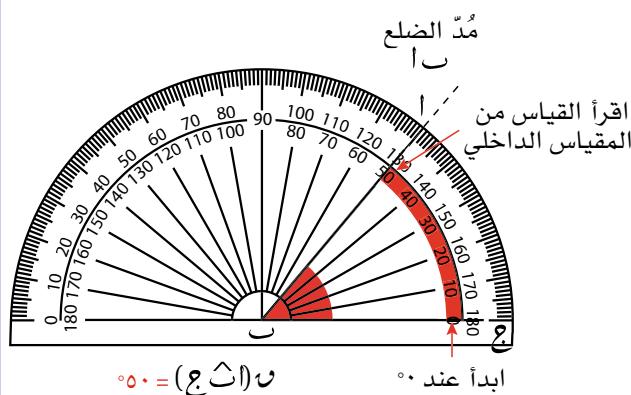
مثال ١

أوجد $m(\hat{A}CJ)$ و $m(FCK)$ باستخدام المنقلة.

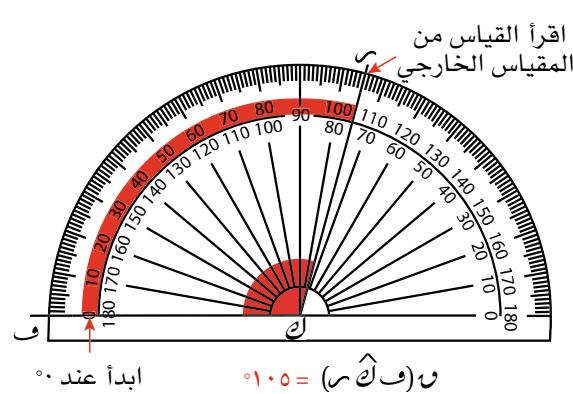


الحل:

ضع مركز المنقلة عند النقطة C ، حاذِ خطّ القاعدة مع الضلع CJ .
مدِ الضلع C ليتجاوز المقياس. البدء من الصفر يعني أن تقرأ المقياس الداخلي للمنقلة.
 $m(\hat{A}CJ) = 50^\circ$



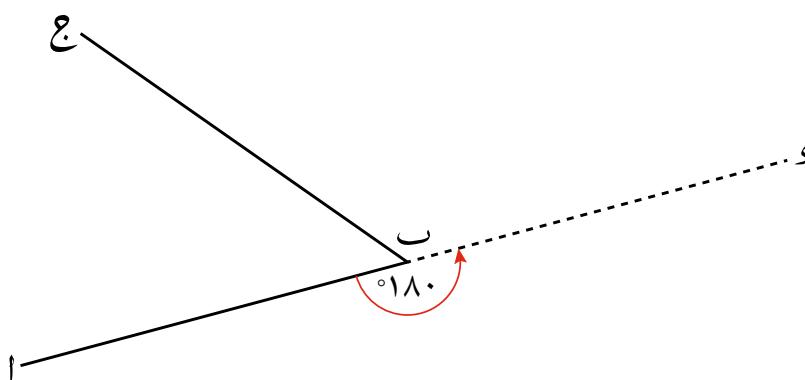
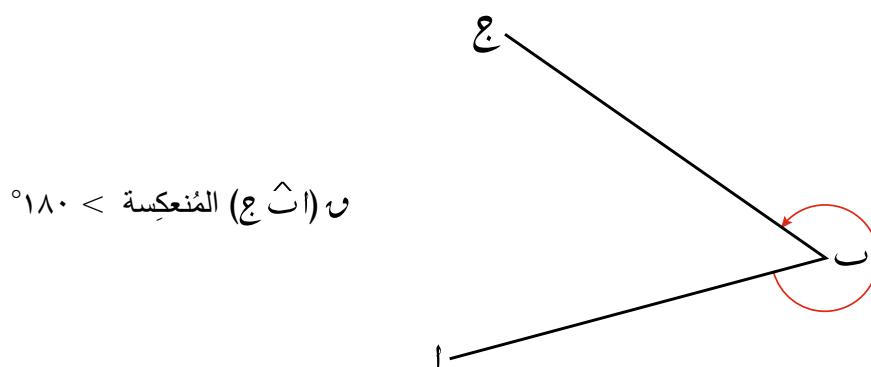
ضع مركز المنقلة عند النقطة K ، حاذِ خطّ القاعدة مع الضلع FK .
البدء من 0° يعني أن تقرأ المقياس الخارجي للمنقلة.
 $m(FCK) = 105^\circ$



قياس الزوايا الأكبر من 180° .

هناك طريقتان مختلفتان لقياس الزاوية المُنْعَكِسَة باستخدام منقلة الـ 180° ; عليك استخدام الطريقة التي تجدها أَسْهَلَ بالنسبة إليك. افترض أنك تريد إيجاد قياس $(\hat{A}JU)$ المُنْعَكِسَة:

الطريقة 1: مدد أحد ضلعى الزاوية لتشكّل خطًا مستقيماً (زاوية 180°), ثم أوجد قياس «الزاوية الإضافية». أضف قياس «الزاوية الإضافية» إلى 180° لتحصل على القياس الكلي للزاوية المُنْعَكِسَة.

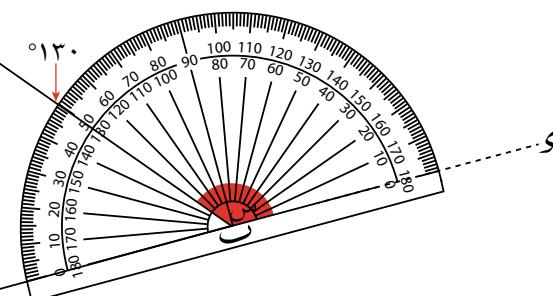


استخدم المنقلة لتقيس الجزء المُتَبَقِّي
 $(\hat{A}JU)$ (المسمى سـ).

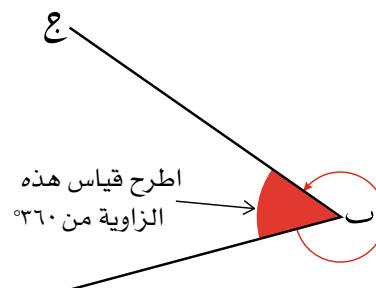
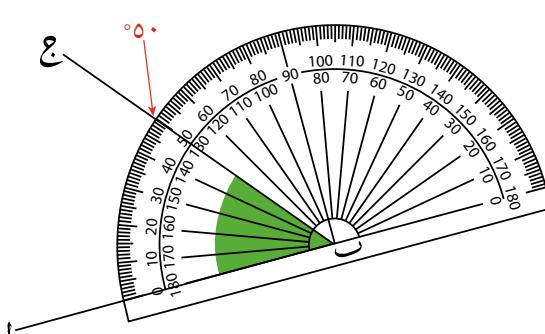
أضف هذا القياس إلى 180° لتجد $\text{نـ } (\hat{A}JU)$ المُنْعَكِسَة.

$${}^{\circ}310 = {}^{\circ}130 + {}^{\circ}180$$

$$\therefore \text{نـ } (\hat{A}JU) \text{ المُنْعَكِسَة} = {}^{\circ}310$$

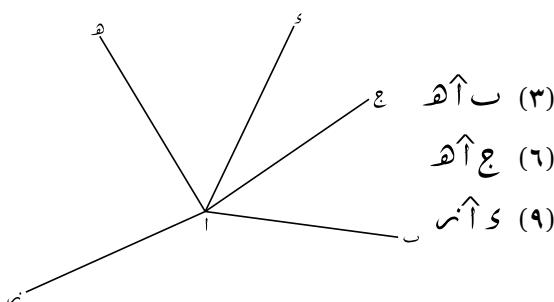


الطريقة ٢: أوجد قياس الزاوية الداخلية (غير المُنْعَكِسَة) واطرح الناتج من 360° .



$$\text{نـ (أـ جـ) المـنـعـكـسـةـ} = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$$

تمارين ٤-٢-١



١) لكل زاوية من الزوايا التالية:

- (١) بـأـعـ
- (٢) بـأـوـ
- (٣) سـأـهـ
- (٤) عـأـوـ
- (٥) عـأـنـرـ
- (٦) عـأـهـ
- (٧) دـأـبـ المـنـعـكـسـةـ
- (٨) دـأـهـ

أ) حدد نوع الزاوية.

ب) قدر قياس كل زاوية بالدرجات.

ج) استخدم المنقلة لتجد القياس الحقيقي لكل زاوية مُقرّباً إلى أقرب درجة.

٤-٢-ب رسم الزوايا

لرسم زاوية قياسها معطى، تحتاج إلى مسطرة ومنقلة وقلم. نفذ المثال أدناه لتتذكرة كيف ترسم زوايا قياسها $> 180^\circ$ أو $< 180^\circ$.

مثال ٢

ارسم:

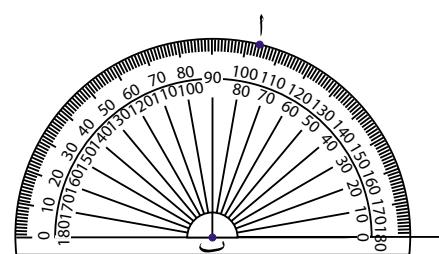
- أ** اَلْعَجُونَ الَّتِي قياسها 195° **ب** سَرْصَعُ الَّتِي قياسها 76°

الحل:

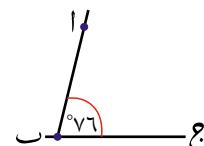
استخدم مسطرة لرسم خطًا مستقيماً يمثل أحد ضلعى الزاوية. تأكّد من أن الخط يمتد أبعد من المنقلة.
سمّ رأس الزاوية بـ **ب**

**أ**

ضع المنقلة على الخط المستقيم، بحيث يكون مركز المنقلة على النقطة **ب**. حدد قياس الزاوية التي ترغب في رسماها، ووضع نقطة صغيرة وسمّها **أ**.



أبعد المنقلة واستخدم مسطرة لرسم خطًا مستقيماً يصل بين الرأس **ب** والنقطة **أ**.
سمّ الزاوية بطريقة صحيحة.

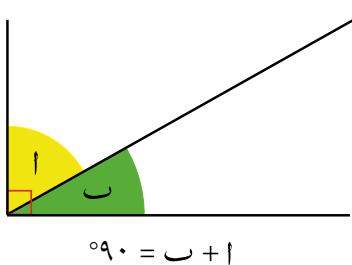
**ب**

لرسم زاوية مُنْعَكِسَة، عليك أن ترسم زاوية قياسها أقل من 180° أولاً. لكي ترسم زاوية قياسها 195° ، ارسم أولاً زاوية قياسها 15° ، ثم مدد أحد ضلعاتها لتضفي إليها زاوية قياسها 180° ، أو ارسم زاوية قياسها $360^\circ - 195^\circ = 165^\circ$ ، ويمكنك عندها تسمية الزاوية المُنْعَكِسَة.

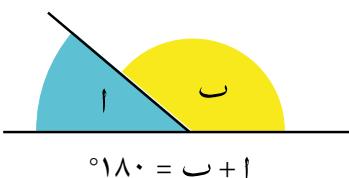
تمارين ٤-٢-ب

- ١** استخدم مسطرة ومنقلة لرسم بدقة كل زاوية من الزوايا الآتية:

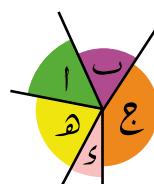
- أ** $\text{س}(\text{اَلْعَجُونَ}) = 135^\circ$ **ب** $\text{س}(\text{سَرْصَعُ}) = 30^\circ$ **ج** $\text{س}(\text{كَرْس}) = 80^\circ$
د $\text{س}(\text{هَنْرَع}) = 210^\circ$ **هـ** $\text{س}(\text{كَلْم}) = 90^\circ$ **و** $\text{س}(\text{عَكْل}) = 255^\circ$



$$A + B = 90^\circ$$



$$A + B = 180^\circ$$



$$A + B + C + D = 360^\circ$$

الزوايا المُكملتان (زوايا على خط مستقيم)

عندما يكون مجموع قياسي زاويتين يساوي 90° ، تكون هاتان الزوايا مُكملتين.

الزوايا المُكملتان

تتأكد من معرفتك بالحقائق الآتية عن الزوايا:

مساعدة!

عموماً:

في الزاويتين المُمكَنَتين، إذا كان قياس إحداهما S° ، فإن قياس الزاوية الأخرى يجب أن يكون $90^\circ - S^\circ$ ، والعكس صحيح.

في الزاويتين المُكَمَلَتين، إذا كان قياس إحداهما S° ، فإن قياس الزاوية الأخرى يجب أن يكون $180^\circ - S^\circ$ ، والعكس صحيح.

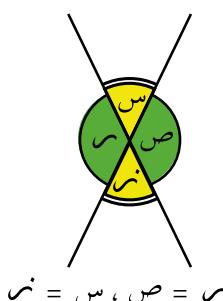
الزوايا حول نقطة

تشكل الزوايا حول نقطة دورة كاملة.

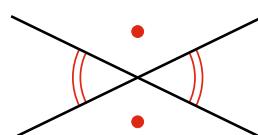
مجموع قياسات الزوايا حول نقطة يساوي 360° .

الزوايا المتقابلة بالرأس

عندما يتقاطع خطان مستقيمان، يتشكل زوجان من زاويتين مُتَقَابِلَتَيْن بِالرَّأْسِ. تكون الزوايا المتقابلة بالرأس متساويتين في القياس.



$$\text{ص} = \text{س}, \text{ س} = \text{ص}$$



زوجان من زاويتين مُتَقَابِلَتَيْن بِالرَّأْسِ

تشكل أزواج الزوايا المُتَجَاوِرة الناتجة من رسم الزوايا المتقابلة بالرأس أزواجاً من الزوايا المُكَمَلَة، لأنها أيضاً زوايا على خط مستقيم.

استخدام العلاقات بين الزوايا لـ إيجاد قياسات الزوايا المجهولة

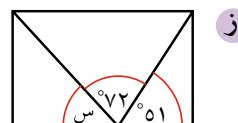
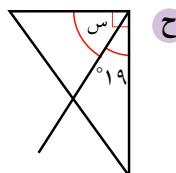
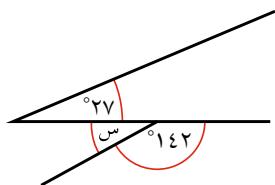
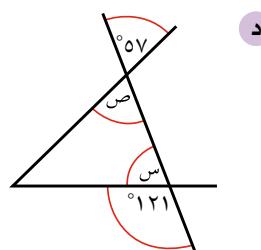
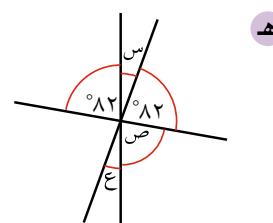
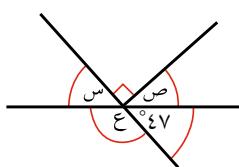
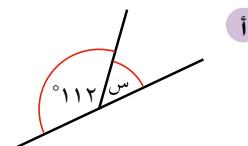
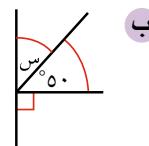
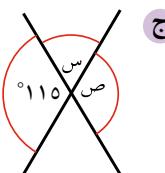
يمكن استخدام العلاقات بين الزوايا لاحتساب قياسات الزوايا المجهولة.

اتبع الخطوات البسيطة الآتية:

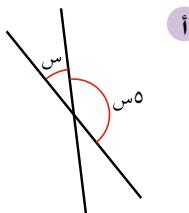
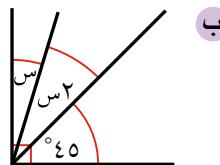
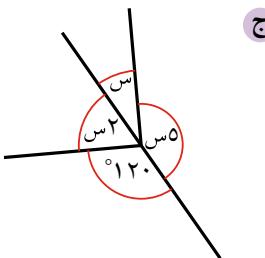
- حدد نوع العلاقة.
- اكتب معادلة.
- أعط تبريرات للعبارات التي تكتبها.
- حل المعادلة لتجد قياس الزاوية المجهولة.

تمارين ٤-٤-ج

(١) أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كل مما يلي. بّرّ إجاباتك.



(٢) أوجد قيمة س في كل شكل من الأشكال الآتية:



(٣) زاويتان متكاملتان. قياس الزاوية الأولى يساوي ضعف قياس الزاوية الثانية. ما

قياس كل منها؟

(٤) إذا علمت أن قياس إحدى الزوايا الناتجة من تقاطع خطين مستقيمين 127° ، فما

قياس الزوايا الثلاث الأخرى؟

مساعدة

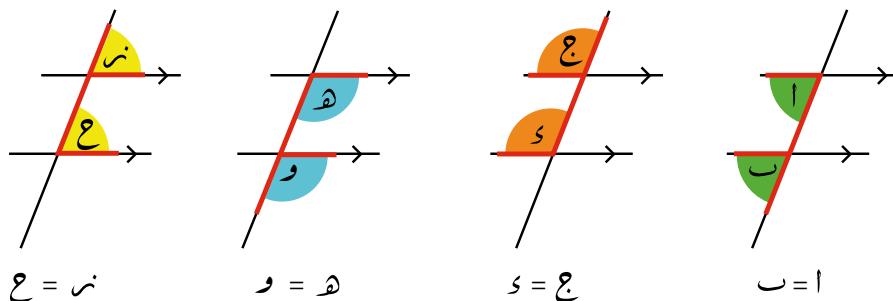
رغم أن الأشكال «F» و«Z» و«C» تساعدك على تذكر هذه الخصائص، فإن عليك استخدام المصطلحات الآتية «زاویتان مُتناظراتان» و«زاویتان مُتبادلتان» و«زاویتان متحالفتان» لتصفيها عندما تجرب عن الأسئلة.

٤-٢-٤ الزوايا والخطوط المستقيمة المتوازية

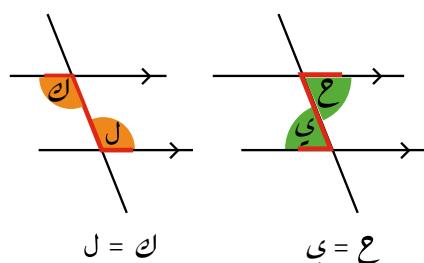
عندما يقطع قاطع خطين مستقيمين متوازيين (القاطع هو خط ثالث)، تتشكل ثمانية زوايا تجمع بين بعضها خصائص محددة.

الزوايا المتناظرة (شكل F)

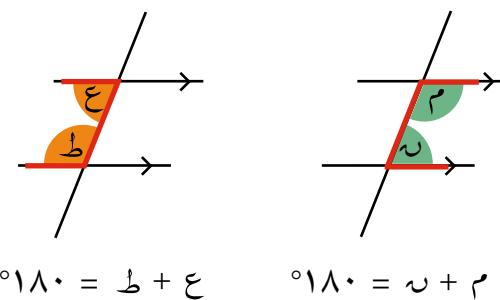
عندما يقطع قاطع خطين مستقيمين متوازيين، تتشكل أربعة أزواج من **الزوايا المتناظرة**. بحيث تكون كل زاويتين متناظرتين متساويتين في القياس.

**الزوايا المُتَبَادِلة (شكل Z)**

عندما يقطع قاطع خطين مستقيمين متوازيين، يتشكل زوجان من **الزوايا المُتَبَادِلة**. تكون الزاویتان المُتَبَادِلَتان متساویتين في القياس.

**الزوايا المُتَحَافِفة (شكل C)**

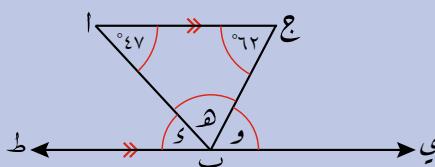
عندما يقطع قاطع خطين مستقيمين متوازيين، يتشكل زوجان من **الزوايا المُتَحَافِفة**. تكون الزاویتان المُتَحَافِفتان متكاملتين (مجموع قياسيهما 180°) وتقعان في جهة واحدة من القاطع.



يتتساوى قياس الزاویتين المُتَحَافِفتين فقط عندما يتعامد القاطع مع الخطين المستقيمين المتوازيين. (عندما يكون قياس كل منهما 90°).

مثال ٢

في الشكل المقابل، أوجد قيمة كل من ك ، هـ ، وـ وـ :

**الحل:**

(جـ $\hat{\text{أـ}}$)، (طـ $\hat{\text{أـ}}$) زاويتان متبادلتان،
أي إنها متساويتان في القياس.

(أـ $\hat{\text{جـ}}$)، (جـ $\hat{\text{بـ}}$) زاويتان متبادلتان،
أي إنها متساويتان في القياس.

= مجموع قياس الزوايا على مستقيم واحد
 180° . عَرَض عن كـ ، وـ ، لِإيجاد قيمة
 هـ .

$$\text{كـ} = \text{وـ} (\text{طـ} \hat{\text{أـ}}) = 47^\circ$$

$$\text{وـ} = \text{وـ} (\text{جـ} \hat{\text{بـ}}) = 62^\circ$$

$$\text{هـ} = \text{وـ} (\text{جـ} \hat{\text{أـ}})$$

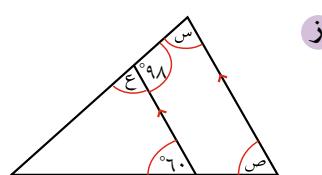
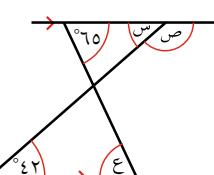
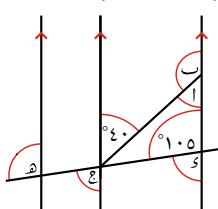
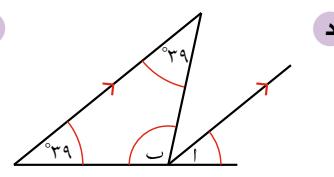
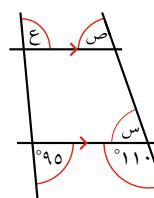
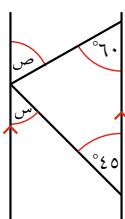
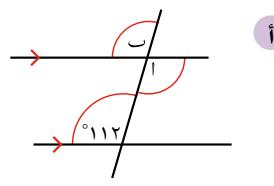
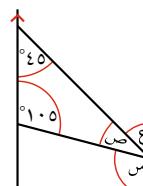
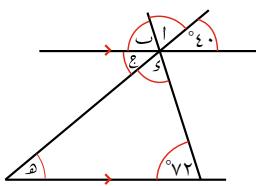
$$\therefore \text{كـ} + \text{هـ} + \text{وـ} = 180^\circ \quad (\text{زاوية مستقيمة})$$

$$\therefore \text{هـ} = 180^\circ - 62^\circ - 47^\circ$$

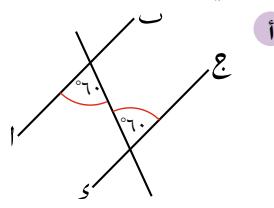
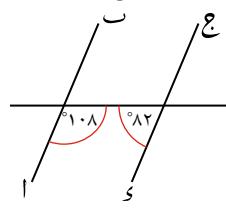
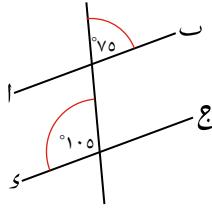
$$\text{هـ} = 71^\circ$$

تمارين ٤-٢-٤

(١) أوجد قياس الزوايا المُشار إليها بـأحرف في الأشكال الآتية. بـرر إجاباتك.



(٢) قـرـرـ في كـلـ من الأمثلـةـ الآتـيـةـ إنـ كانـ $\text{أـ} \parallel \text{جـ}$ أو لاـ. بـرـرـ إـجـابـاتـكـ.



٣-٤ الإنشاءات الهندسية

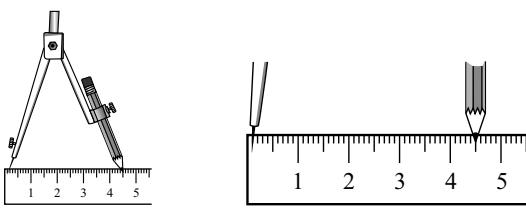
تُعدّ الإنشاءات الهندسية رسوماً هندسية دقيقة. ولا بدّ لك من استخدام الأدوات الهندسية لتنشئ رسوماً هندسية.

٤-٣-١ الإنشاءات الهندسية باستخدام المسطرة والفرجار

تُعدّ المسطرة (التي تسمى أحياناً الحافة المستقيمة) والفرجار من أكثر الأدوات المفيدة في الإنشاءات الهندسية، حيث تُستخدم المسطرة لرسم الخطوط المستقيمة؛ ويُستخدم الفرجار لقياس الطول وتحديد ولرسم الأقواس والدوائر التي تسمح لك بتصيف الزوايا والقطع المستقيمة.

هل تتذكّر كيف تستخدم الفرجار لتحديد طولاً مُعطى؟ إليك المثال الآتي الذي يبيّن لك كيف تُنشئ قطعة مستقيمة طولها ٤,٥ سم. (الرسوم المعطاة ليست مرسومة بمقاييس).

- استخدم مسطرة وقلم رصاص مدبّب الرأس لترسم خطًا مستقيماً أطول من الطول الذي تحتاج إليه. ضع شرطة رأسية قصيرة (أو نقطة) على الخط المستقيم، وسمّها A.
- استخدم المسطرة لفتح الفرجار فتحة طولها ٤,٥ سم.
- ضع رأس الفرجار عند النقطة A. أدر الفرجار لرسم قوساً قصيراً يقطع الخط المستقيم على بعد ٤,٥ سم. سُمّ هذه النقطة B. تكون الآن قد رسمت القطعة المستقيمة AB التي طولها ٤,٥ سم.



تبين لك الصورة أدوات الأساسية المُتوقع منك استخدامها.

من المهم أن يكون رأس قلم الرصاص الذي تستخدمه مدبباً وأن يكون عموداً الفرجار الذي تستخدمه ثابتين.

عندما تستطيع استخدام مسطرة وفرجار لتقيس طول قطعة مستقيمة وترسمها، يصبح من السهل إنشاء المثلثات والأشكال الهندسية الأخرى.

إنشاء المثلثات

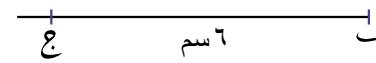
يمكنك رسم مُثلث إذا عرفت أطوال أضلاعه الثلاثة. اقرأ المثال ٤ لتعرف كيف تنشئ مُثلثاً أطوال أضلاعه الثلاثة معطاة.

مثال ٤

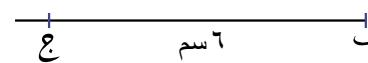
ارسم المثلث $A-B-C$ ، حيث $A = 5$ سم، $B = 6$ سم، $C = 4$ سم.

الحل:

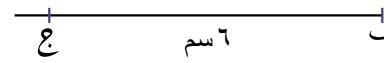
في معظم الحالات يكون من الأسهل البدء بالضلوع الأكبر. ارسم الضلع $(B-C) = 6$ سم (وسمه).



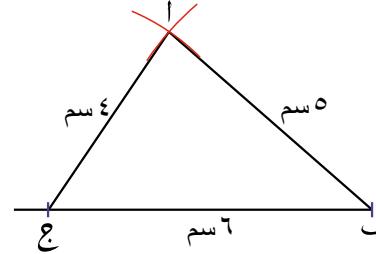
افتح الفرجار فتحة طولها ٥ سم وهو طول A . ضع رأس الفرجار عند النقطة B وارسم قوساً. كل جزء من القوس يبعد عن النقطة B مسافة ٥ سم. لذا يمكن أن تكون النقطة A أي نقطة على القوس.



افتح الفرجار فتحة طولها ٤ سم وهو طول $C-A$. ضع رأس الفرجار عند النقطة C وارسم قوساً. كل جزء من هذا القوس يبعد عن النقطة C مسافة ٤ سم. لذا يمكن أن تكون النقطة A أي نقطة على القوس.



النقطة A هي نقطة تقاطع القوسين.
صل $B-A-C$.



من المفيد أن ترسم الخط المستقيم أطول مما تحتاج إليه، ثم تقيس الطول الصحيح عليه. عند إنشاء شكل هندسي، يساعدك تحديد النقاط بشرطة صغيرة على تحديد مكان تثبيت رأس الفرجار.

لاحظ أن هذه الأشكال الهندسية ليست مرسومة بدقة. ولكن يجب استخدام قياسات دقيقة في الأشكال الهندسية التي ترسمها.

تمارين ٤-٣-١

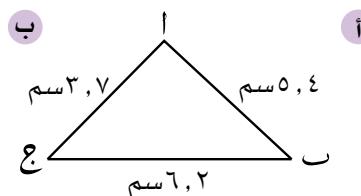
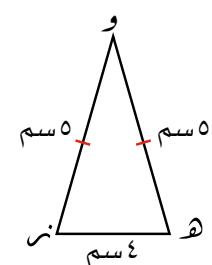
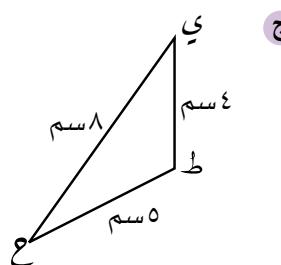
(١) ارسم كل قطعة من القطع المستقيمة الآتية:

ج $\text{هرس} = 5, 5$ سم

ب $B-C = 75$ مم

أ $A = 6$ سم

١٢) ارسم كل مثلث من المثلثات الآتية بدقة:



١٣) ارسم كل مثلث من المثلثات الآتية:

أ) المثلث ABC، حيث $BG = 8.5$ سم، $AC = 7.2$ سم، $AG = 6.9$ سم.

ب) المثلث SCU، حيث $SC = 120$ مم، $CU = 66$ مم، $SU = 86$ مم.

ج) المثلث KHE المُتطابق الأضلاع، طول كلّ ضلع من أضلاعه 6.5 سم.

د) المثلث NLR المُتطابق الضلعيين، طول قاعدته 4 سم، $NR = LR = 6.5$ سم.

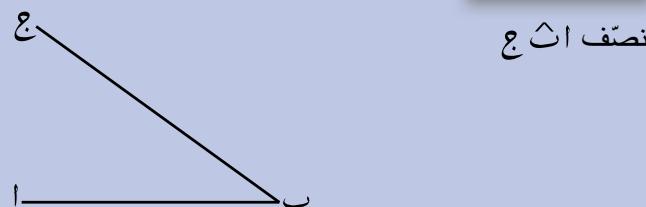
٤-٣-٤ بـ الإنشاءات الهندسية باستخدام الحافة المستقيمة

في هذا الدرس، لن تستخدم المسطرة المدربة لتقيس الأطوال، بل ستستخدمها فقط لترسم خطوطاً مستقيمة.

تصنيف الزاوية

قد تُعطى زاوية ويُطلب إليك ترتيبها، أي تقسيمها إلى نصفين متساوين في القياس.

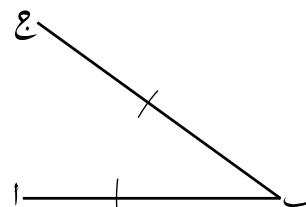
مثال ٥



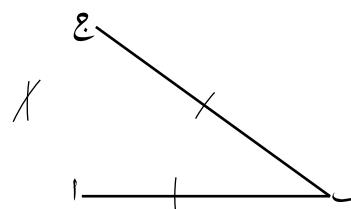
الحل:

افتح الفرجار فتحة بطول مناسب ووضع رأس الفرجار على رأس الزاوية B.

ارسم قوسين يقطعان ضلع الزاوية.

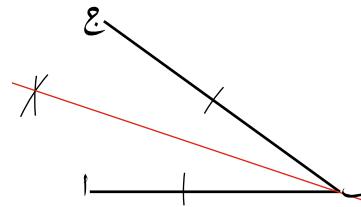


الآن ضع رأس الفرجار من جديد عند كل من القوسين السابعين (من دون تغيير فتحة الفرجار) وارسم قوسين آخرين كما هو مبين.



صل بين نقطة تقاطع القوسين ورأس الزاوية. هذا هو منصف الزاوية.

من المهم ترك الأقواس على الرسم لأنها تبين أنك أنشأت ذلك مستخدماً الحافة المستقيمة والفرجار.



المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

يمكن أن تُعطى قطعة مستقيمة ويطلب إليك أن ترسم منصفاً عمودياً لها. وهو خطٌ مستقيم يقطعها مشكلاً معها زاوية قائمة، ويقسمها إلى نصفين متساوين.

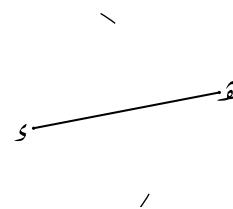
مثال ٦



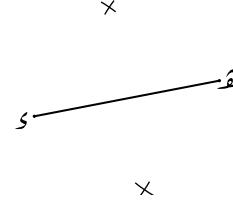
رسم منصفاً عمودياً للقطعة المستقيمة هـ.

الحل:

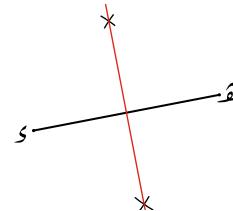
افتح الفرجار فتحة بطول أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة، وضع رأسه عند النقطة هـ. ارسم قوسين، أحدهما فوق منتصف القطعة المستقيمة والآخر تحتها.



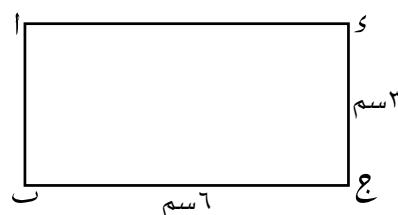
ضع رأس الفرجار عند النقطة هـ (من دون تغيير فتحة الفرجار) وارسم قوسين آخرين كما هو مبين.



صل بين نقطتي تقاطع الأقواس. هذا الخط المستقيم هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة هـ. من المهم أن تبقي الأقواس على الرسم.



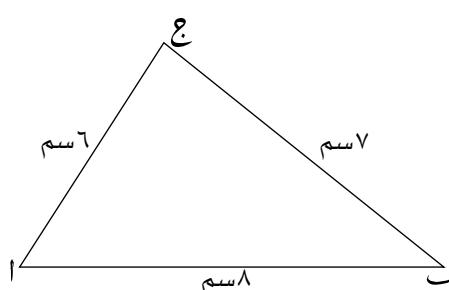
تمارين ٤-٣-ب



١) انسخ المستطيل المعروض في الشكل المجاور:

أ) أنشئ المنصف العمودي للضلعين $\overline{B\bar{C}}$.

ب) نصف $\angle B$.

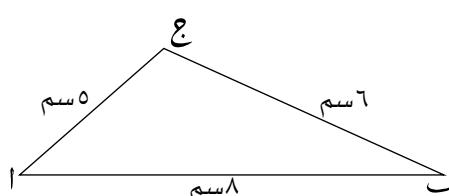


٢) استخدم المسطرة والفرجار لتنشئ نسخة

دقيقة للمُثلث المعروض في الشكل المجاور:

نصف الزوايا الثلاث (على نفس الرسم).

ماذا تلاحظ؟



٣) باستخدام المسطرة والفرجار. أنشئ نسخة

دقيقة للمُثلث المعروض في الشكل المجاور،

ثم أنشئ المنصف العمودي لكلّ ضلع
من أضلاع المُثلث (على نفس الرسم).

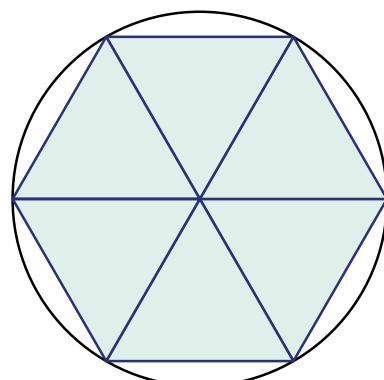
ماذا تلاحظ؟

٤) ارسم دائرة كبيرة، وارسم أيّي وتران غير متوازيين فيها، ثم أنشئ المنصف العمودي

لكلّ وتر. ماذا تلاحظ على نقطة تقاطع المنصفين العموديين؟ فسر ذلك.

٤-٣-ج رسم مُضلعات مُنتظمة باستخدام الدائرة

عليك أن تكون قادرًا على رسم مُضلع منتظم له ٣ أو ٤ أو ٦ أو ٨ أضلاع في دائرة.



السداسي المنتظم

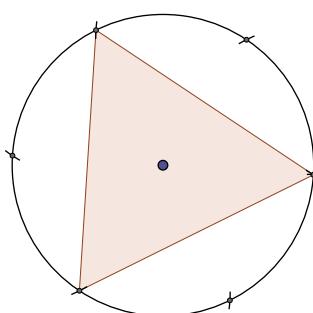
استخدم حقيقة أن ستة مُثلثات متطابقة الأضلاع
تتواءم معًا لتشكل سداسيًا منتظمًا.

خطوات العمل:

رسم دائرة	
من دون تغيير فتحة الفرجار عند رسم الدائرة، ضع رأس الفرجار عند الإشارة المبيّنة على المحيط. ارسم قوساً جديداً على الدائرة.	
ضع رأس الفرجار عند القوس الجديد وارسم قوساً جديداً آخر. انقل رأس الفرجار إلى القوس الجديد وكرر العملية حتى تعود إلى إشارة البدء الأصلية الموجودة على محيط الدائرة.	
صل بين هذه النقاط بالترتيب لترسم سداسياً منتظمًا. كما في السابق، لا تزل الأقواس التي رسمتها.	

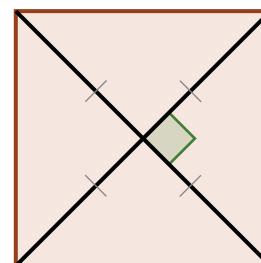
المُثُلَّث متطابق الأضلاع

لترسم مُثُلَّثاً متطابق الأضلاع (مضلع منتظم له ثلاثة أضلاع)، ارسم الأقواس كما لو كنت تُنسِّيء سُداسيًّا منتظمًا. صِل بين كل نقطتين غير متاليتين على محيط الدائرة.



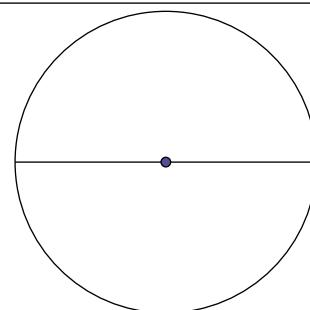
المربع

يمكنك استخدام حقيقة أن قطري المربع يُنْصَف كل منهما الآخر ويعامده.

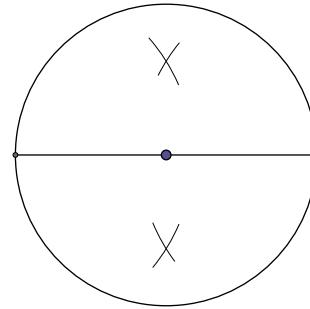


خطوات العمل:

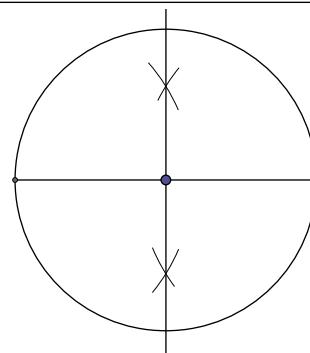
ارسم دائرة وارسم قطرها فيها.



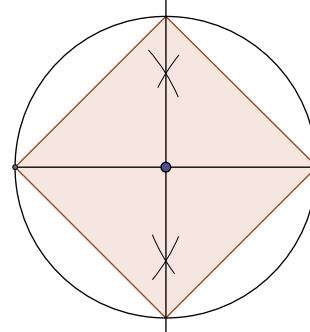
عليك الآن إنشاء المُنْصَف العمودي للقطر. اضبط الفرجار بقدر أطول من نصف القطر. ضع رأس الفرجار عند كل نقطة من نهايتي القطر، وارسم الأقواس كما هو مبين.



صل بين نقطتي تقاطع الأقواس لتشكل المُنْصَف العمودي.



صل بين النقاط الموجودة على محيط الدائرة بالترتيب لتشكل مُربِّعاً.

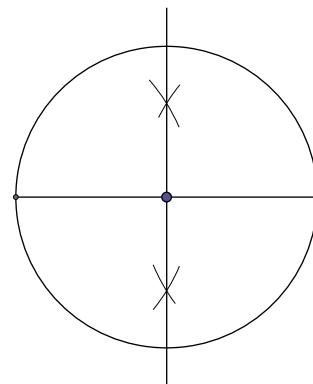


الثُّماني المُنْظَم

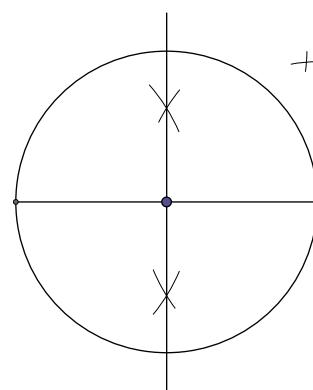
ابدأ برسم مُربَّع، ثم نصُّف الزوايا الموجودة عند مركز الدائرة.

خطوات العمل:

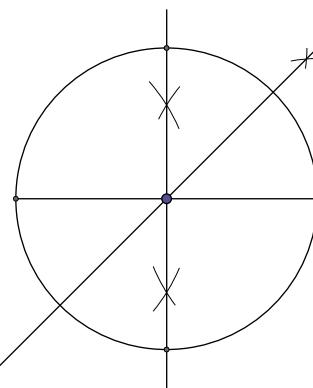
بعد رسم الخطين المستقيمين المُتَعَامِدَيْن، عليك تصيف الزوايا القائمة الموجودة عند مركز الدائرة.



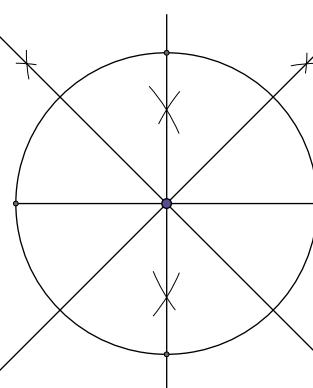
اضبط الفرجار بقدر طول نصف قطر الدائرة الأصلية. ضع رأس الفرجار عند نقطة النهاية اليمنى لضلع الزاوية، وارسم قوساً، ثم كرر الأمر نفسه بوضع رأس الفرجار عند نقطة تقاطع ضلع الزاوية الآخر مع الدائرة.



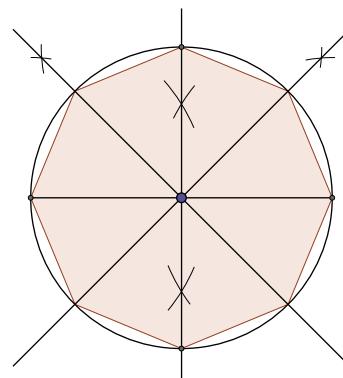
صل بين نقطة تقاطع القوسين ومركز الدائرة؛ ومدد المستقيم ليقطع الدائرة مرتين.



كرر الخطوات السابقة لترسم القطر الآخر.



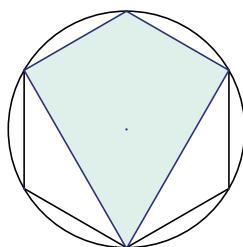
صل بين هذه النقاط لتشكل المضلع الثمانى المنتظم.



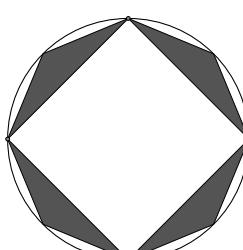
تمارين ٤-٣-ج

(١) ارسم أربع دوائر منفصلة نصف قطر كل منها ٥ سم، وارسم في داخل كل دائرة شكلًا من الأشكال التالية:

- أ مُضلع سُداسيٌ منتظم
- ب مُثلث متطابق الأضلاع
- ج مُربع
- د مُضلع ثمانىٌ منتظم



(٢) يُبيّن الشكل المجاور طائرة ورقية (الدالتون) داخل مُضلع سُداسيٌ منتظم. ارسمها بصورة دقيقة مبتدئاً بدائرة قطرها ٨ سم.



(٣) يُظهر الشكل المجاور أربعة مُثلثات متطابقة الضلعين تحيط بمُربع. نفذ الرسم بدقة مبتدئاً بدائرة قطرها ٧ سم.

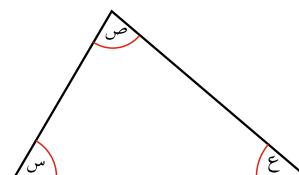
٤-٤ المُثُلَّثات

المُثُلَّث هو شكل مستوٌ له ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.
تُصنَّف المُثُلَّثات بحسب أطوال أضلاعها وقياس زواياها (أو الاثنين معاً).

• حسب أطوال الأضلاع

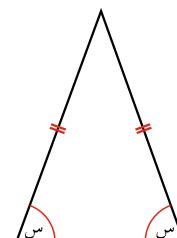
المُستوٍ يعني المُسْطَح. الأشكال المستوية هي أشكال مسطحة أو ذات بعدين.

- أطوال اضلاعه مختلفة.
- قياسات زواياه مختلفة.



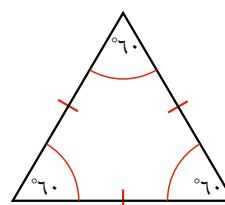
**مُثُلَّث مُخْتَلِفُ
الأَضْلاعِ**

- له ضلعان متطابقان
- الزاويتان المقابلتان للضلعين المتطابقين متساوietan في القياس.



**مُثُلَّث مُتَطَابِقُ
الضلعَيْنِ**

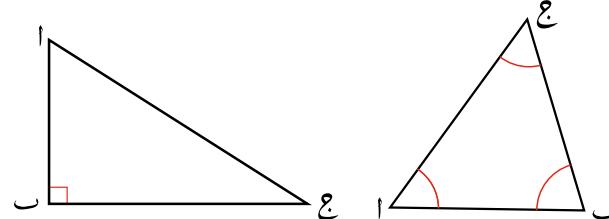
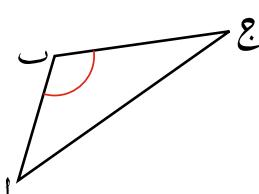
- له ثلاثة أضلاع متطابقة
- زواياه الثلاث متساوية في القياس.



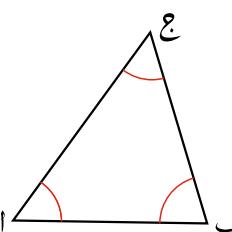
**مُثُلَّث مُتَطَابِقُ
الأَضْلاعِ**

• حسب قياس الزوايا

- مُثُلَّث منْفَرِجُ الزَّوْاِيَّةِ**
توجد زاوية واحدة فيه
قياسها أكبر من 90° .

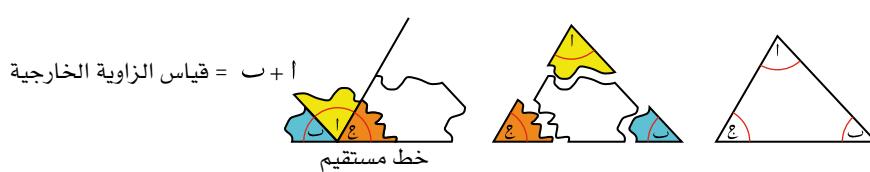


- مُثُلَّث حَادُ الزَّوْاِيَّةِ**
جميع قياسات زواياه
 90° أقل من.



خصائص زوايا المُثُلثات

انظر إلى الأشكال الآتية. ستلاحظ خاصيَّتين مهمَّتين لزوايا المُثُلث:

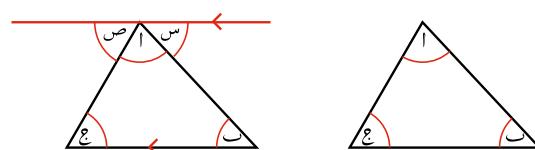


تُسمى الزوايا الثلاث في المُثُلث زوايا داخلية. إذا مددت ضلعاً من أضلاع المُثُلث، فإنك تشكِّل زاوية خارج المُثُلث. تُسمى تلك الزاوية بالزاوية الخارجية.

- مجموع قياسات زوايا المُثُلث الداخلي يساوي 180° .
- قياس الزاوية الخارجية في المُثُلث يساوي مجموع قياسَيِّ الزاويَّتَيْنِ الداخليَّتَيْنِ المُقابليَّتَيْنِ لها.

مجموع قياسات زوايا المُثُلث يساوي 180° .

لإثبات هذه الخاصيَّة، عليك رسم خطٍّ مستقيم موازٍ لأحد أضلاع المُثُلث:



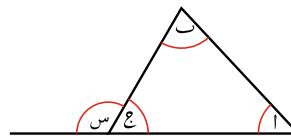
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (\text{زايا على خط مستقيم})$$

بما أن:

$\beta = \beta$, $\gamma = \gamma$ (الزاويَّات المُتَبَادِلَات متساوِيَّات في القياس)

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

قياس الزاوية الخارجية للمُثُلث يساوي مجموع قياسَيِّ الزاويَّتَيْنِ الداخليَّتَيْنِ المُقابليَّتَيْنِ لها



تعلَّمت سابقاً أن:

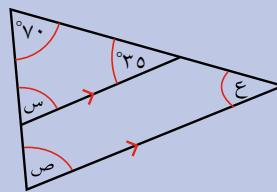
$$\alpha = \beta + \gamma$$

للحظة

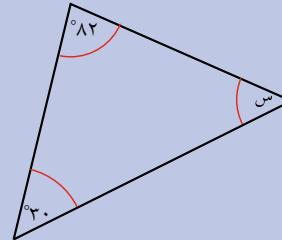
بعض العمليات الجبرية التي استُخدِّمت هنا هي أمثلة على حلول المعادلات الخطية. لقد قمت بذلك سابقاً، لكنها ستنطِّي لاحقاً بتفصيل أكبر في الوحدة

مثال ٧

أوجد قيمة كل من: س، ص، ع فيما يلي، وفسّر إجابتك.



ب



أ

للحما

ينتطلب عدد كبير من أسئلة علم المثلثات منك إجراء حسابات شبيهة بهذه الحسابات قبل أن تنتقل إلى حل المسائل.

الحل:(مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°)

$$180^\circ = 30^\circ + 82^\circ + س$$

$$س = 180^\circ - 82^\circ - 30^\circ$$

$$س = 68^\circ$$

أ

(مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°)

$$180^\circ = 35^\circ + 70^\circ + س$$

$$س = 180^\circ - 70^\circ - 35^\circ$$

$$س = 75^\circ$$

ب

(زوايتان مُتناظرتان)

$$180^\circ = 70^\circ + ص + ع$$

$$180^\circ = ع + 75^\circ + 70^\circ$$

$$ع = 180^\circ - 75^\circ - 70^\circ$$

$$ع = 35^\circ$$

أ

(مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°)

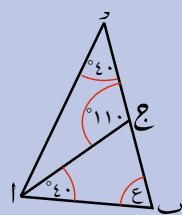
(زوايتان مُتناظرتان)

$$35^\circ = ع$$

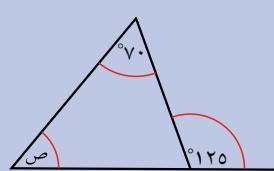
$$أو ع = 35^\circ$$

مثال ٨

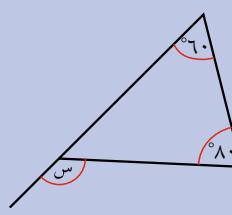
أوجد قيمة كل من: س، ص، ع.



ج



ب



أ

الحل:

(زاوية خارجية في المثلث)

$$80^\circ + 60^\circ = س$$

$$140^\circ = س$$

أ

(زاوية خارجية في المثلث)

$$\begin{aligned} 125^\circ &= ص + 70^\circ \\ ص &= 125^\circ - 70^\circ \\ ص &= 55^\circ \end{aligned}$$

ب

(زاوية خارجية في المثلث اب ج)

$$\begin{aligned} 110^\circ &= ع + 40^\circ \\ ع &= 110^\circ - 40^\circ \\ ع &= 70^\circ \end{aligned}$$

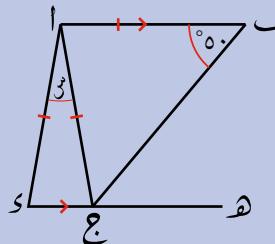
ج

قد تكون إحدى الزوايا الخارجية في مثلث ما زاوية داخلية في مثلث آخر، كما في المثال ٨ الجزء ج.

تُعد الأمثلة أعلاه أمثلة بسيطة، لأنك تستطيع تقرير أي قاعدة أو قانون سُيُطّبِق بسهولة. في أغلب الحالات، يُتوقع أن تطبق هذه القواعد لتجد قياسات الزوايا في رسومات أكثر تعقيداً. ستحتاج إلى تنفيذ علاقات الزوايا ودمجها معًا لتجد الحل.

مثال ٩

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحل:

(اب ج مثلث متطابق الضلعين)

$$\therefore \hat{ج} = 50^\circ$$

سابقاً

(مجموع قياسات زوايا المثلث)

$$\begin{aligned} \therefore \hat{أ} + \hat{ج} + \hat{س} &= 180^\circ \\ \therefore \hat{أ} + 50^\circ + 80^\circ &= 180^\circ \\ \therefore \hat{أ} &= 50^\circ \end{aligned}$$

(زوايا مترادفات)

$$\therefore \hat{ج} = 80^\circ$$

(المثلث اب ج متطابق الضلعين)

$$\begin{aligned} \therefore \hat{أ} &= \hat{ج} \\ \therefore 50^\circ &= 80^\circ - س \\ \therefore س &= 30^\circ \end{aligned}$$

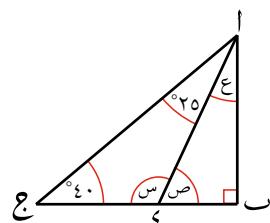
(مجموع قياسات زوايا المثلث اب ج)

$$\therefore س = 20^\circ$$

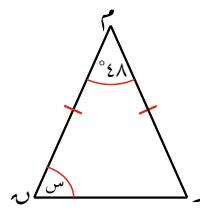
يوجد في المثلث متطابق الضلعين ضلعان متساويان في الطول وزوايا متساويان (زوايا القاعدة) متساويان في القياس. إذا إذا علمت أن المثلث متطابق الضلعين، يمكنك وضع علامتين على زاويتي قاعدة الضلعين المتساوين على أن لهما القياس نفسه.

تمارين ٤-٤

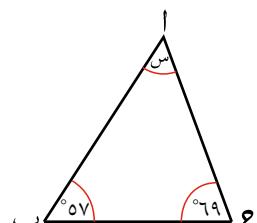
(١) أوجد قياس الزوايا المشار إليها بـأحرف في كل ممّا يلي. بّرّ إجاباتك.



ج

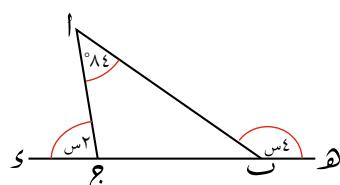


ب

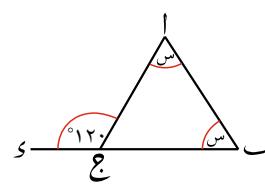


ج

(٢) أوجد قيمة س في كل ممّا يلي. بّرّ إجاباتك.

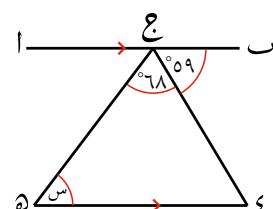


ب

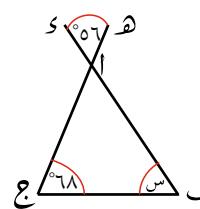


ج

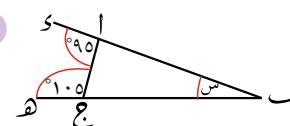
(٣) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف س في الأشكال الآتية. وضّح خطوات الحل.



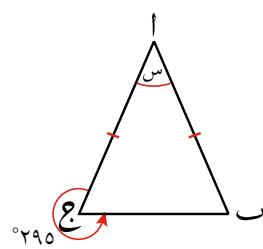
ج



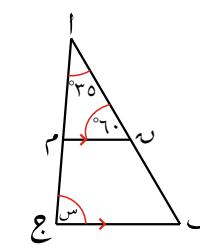
ب



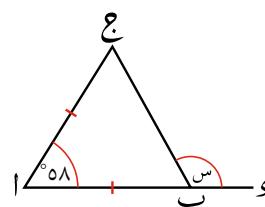
ج



د



هـ



د

٤-٥ الأشكال الرباعية

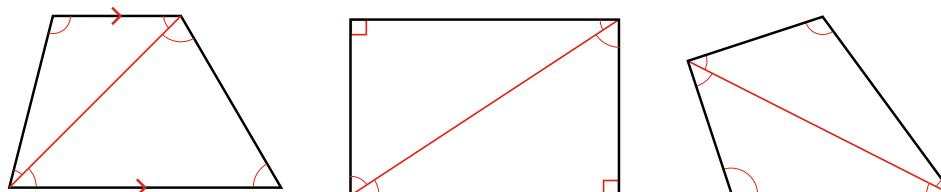
الأشكال الرباعية هي أشكال مستوية لها أربعة أضلاع وأربع زوايا داخلية. تُسمى الأشكال الرباعية بحسب خصائصها كما في الجدول التالي:

ملخص الخصائص	أمثلة	اسم الشكل الرباعي
<p>الأضلاع المتقابلة متوازية ومتتساوية في الطول.</p> <p>الزوايا المتقابلة متساوية في القياس.</p> <p>القطран ينصف كل منهما الآخر.</p>	<p>$\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$</p>	مُتوازي الأضلاع
<p>الأضلاع المتقابلة متوازية ومتتساوية في الطول.</p> <p>قياس كل زاوية $= 90^\circ$.</p> <p>القطران متساويان في الطول، وينصف كل منهما الآخر.</p>		المُستطيل
<p>جميع الأضلاع متساوية في الطول. قياس كل زاوية $= 90^\circ$.</p> <p>القطران متساويان في الطول.</p> <p>القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر، وينصف القطران الزوايا المتقابلة.</p>		المُربع
<p>جميع الأضلاع متساوية في الطول.</p> <p>الأضلاع المتقابلة متوازية.</p> <p>الزوايا المتقابلة متساوية في القياس.</p> <p>القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر، وينصف القطران الزوايا المتقابلة.</p>	<p>$\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$</p>	المعين
زوج واحد من الأضلاع المتوازية.		شبه المُنحرف
<p>زوجان من الأضلاع المتجاورة متساويان في الطول.</p> <p>زوج واحد من الزوايا المتقابلة متساوية في القياس.</p> <p>يتقاطع القطران ويُشكّلان زاوية قياسها 90°.</p>	<p>$\angle ACD = \angle BCD$ $\angle ADB = \angle CBD$</p>	الطائرة الورقية (الدالتون)

في الحقيقة، تعد بعض هذه الأشكال حالات خاصة من الأشكال الأخرى. فالمربيع مثلاً أيضاً مستطيل لأن أضلاعه المتقابلة متوازية ومتتساوية في الطول وقياس كل من زواياه يساوي 90° . كما أن كل معين هو متوازي أضلاع. من جهة أخرى، لا يكون العكس في هذين المثلين صحيحاً! فالمستطيل ليس مربعاً. ما الحالات الخاصة الأخرى التي يمكن أن تفكّر بها؟

مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي

يمكن تقسيم الشكل الرباعي إلى مُثلثين من خلال رسم قطر واحد، وقد عرفت سابقاً أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180° ، لذا يكون مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي $360^\circ = 180^\circ + 180^\circ$

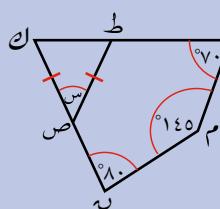


ويمكن استخدام خاصية مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي بالإضافة إلى الخصائص الأخرى للأشكال الرباعية، لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة.

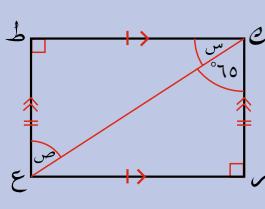
مثال ١٠

أوجد قياس الزوايا المشار إليها بحرف في كلّ شكل من الأشكال الآتية:

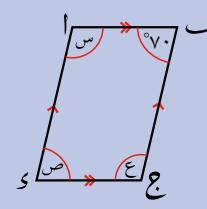
ج شكل رباعي



ب مستطيل



أ متوازي أضلاع



الحل:

(أ) ، (ب) متحالفتان

$$\text{أ} \quad س = 110^\circ$$

$$\text{ص} = 70^\circ$$

$$\text{ع} = 110^\circ$$

(ب) ، (ك) مقابلتان في متوازي الأضلاع

(أ) ، (ع) مقابلتان في متوازي الأضلاع

(ك) زاوية قائمة في المستطيل

$$\text{ب} \quad س + 90^\circ = 65^\circ$$

$$\therefore س = 90^\circ - 65^\circ$$

$$\text{س} = 25^\circ$$

$$\text{ص} = 65^\circ$$

(زوايا مترادفات)

(مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي)

(مُثلث متطابق الضلعين)

(مجموع قياسات زوايا المثلث لـ ط ص)

$$\text{ج} \quad \text{ن}(LK) = 180^\circ - 145^\circ - 65^\circ$$

$$\text{ن}(LK) = 65^\circ$$

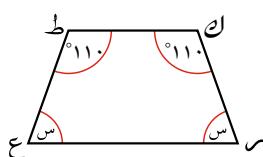
$$\therefore \text{ن}(ك\hat{\text{ط}}\text{ص}) = 65^\circ$$

$$\therefore \text{س} = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ$$

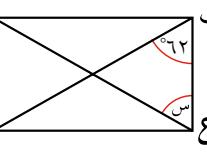
$$\text{س} = 50^\circ$$

تمارين ٥-٤

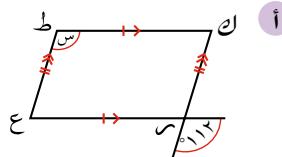
(١) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كل مما يأتي. بّرر إجاباتك.



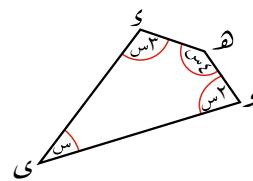
ج



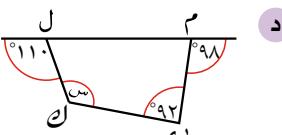
ب



أ

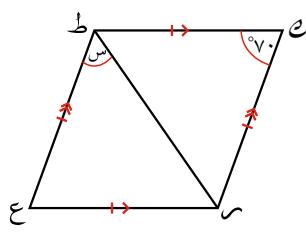


هـ

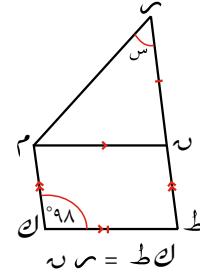


د

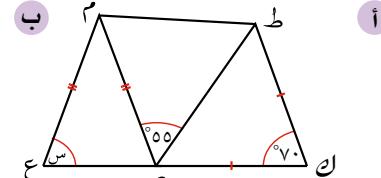
(٢) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كل شكل من الأشكال الآتية. بّرر إجاباتك.



ج



ب



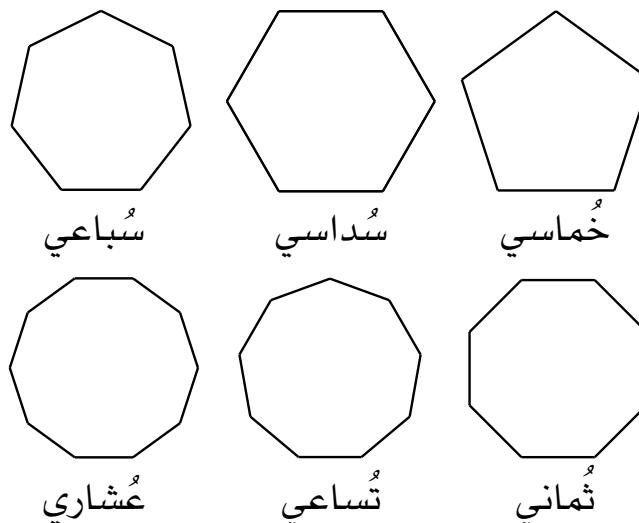
أ

قد تحتاج إلى إيجاد زوايا مجهولة قبل أن تجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف س. في هذه الحالة، اكتب قياس الزاوية الذي وجدته وقدّم التبريرات اللازمة.

٦-٤ مُضلعات أخرى

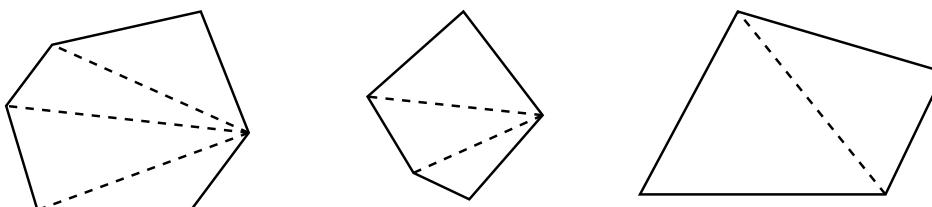
المُضلَّع هو شكل مستو له ثلاثة أضلاع أو أكثر، فالمُثلثات مُضلعات لها ثلاثة أضلاع، والأشكال الرباعية مُضلعات لها أربعة أضلاع، وقد تسمى المُضلعات الأخرى بحسب عدد أضلاعها، والمُضلعات المنتظمة تكون جميع أضلاعها متساوية في الطول وجميع زواياها متساوية في القياس.

تأكد من أنك تعرف أسماء هذه المُضلعات:



مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمُضلَّع

يمكننا إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمُضلعات من خلال تقسيمها إلى مُثلثات:



هل يمكنك ملاحظة النمط الموجود في الأشكال أعلاه؟

لاحظ أنه يمكن تقسيم المُضلَّع إلى مجموعة من المُثلثات يكون عددها أقل من عدد الأضلاع بقدر ٢ دائمًا، فإذا كان عدد الأضلاع (ن)، فإن عدد المُثلثات هو (ن - ٢). بما أن مجموع قياسات زوايا المُضلَّع يساوي $180^\circ \times$ عدد المُثلثات) فإنه يمكننا إيجاد مجموع قياسات زوايا أي مُضلَّع باستخدام الصيغة الآتية:

$$\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمُضلَّع} = (n - 2) \times 180^\circ$$

مثال ١١

أُوجِد مجموع قياسات زوايا المُضلع العُشاري، ثُمَّ أُوجِد قياس كُل زاوية إذا كان هذا المُضلع مُنتظِماً.

الحل:

للمُضلع العُشاري ١٠ أضلاع،
أي أن: $n = 10$

للمُضلع العُشاري المنتظم ١٠
زوايا متساوية في القياس.

$$\begin{aligned} \text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية} &= (n - 2) \times 180^\circ \\ &= (10 - 2) \times 180^\circ \\ &= 1440^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{قياس كُل زاوية في العُشاري المنتظم} &= \frac{1440^\circ}{10} \\ &= 144^\circ \end{aligned}$$

مثال ١٢

إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمُضلع ما 2340° ، فما عدد أضلاعه؟

الحل:

عوّض القيم في صيغة مجموع
قياسات الزوايا للمُضلع.

حل المعادلة لتحصيل على قيمة n .

عدد أضلاع المُضلع ١٥ ضلعاً.

$$\begin{aligned} 2340^\circ &= (n - 2) \times 180^\circ \\ 2340^\circ &= n - 2 \times 180^\circ \end{aligned}$$

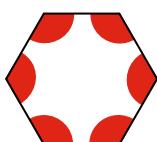
$$2 = n - 13$$

$$2 + 13 = n$$

$$\therefore n = 15$$

مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمُضلع المُحدّب

مجموع قياسات الزوايا الخارجية في المُضلع المُحدّب يساوي 360° دائمًا، مهما كان عدد أضلاعه.

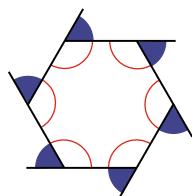


مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمُضلع السُّداسي = $(n - 2) \times 180^\circ$

$$180^\circ \times 4 =$$

$$720^\circ =$$

يكون المُضلع مقعرًا عندما يتضمن زاوية منعكسة. تكون كُل المُضلّعات الباقيّة مُحدّبة.



إذا مددت كل ضلع من أضلاع السادس، ستحصل على ست زوايا خارجية، زاوية واحدة بجانب كل زاوية داخلية. مجموع قياس كل زوج من الزوايا الداخلية والخارجية 180° (زايا على خط مستقيم). هناك ستة رؤوس، أي يوجد ستة أزواج من الزوايا الداخلية والخارجية مجموع قياس زوايا كل زوج منها 180° .

$$\therefore \text{مجموع قياسات (الزوايا الداخلية + الزوايا الخارجية)} = 6 \times 180^\circ \\ = 1080^\circ$$

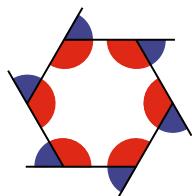
$$\text{ولكن مجموع قياس الزوايا الداخلية} = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$= 4 \times 180^\circ \\ = 720^\circ$$

$$\text{وهكذا فإن: } 720^\circ + \text{مجموع قياسات الزوايا الخارجية} = 1080^\circ$$

$$\text{مجموع قياسات الزوايا الخارجية} = 1080^\circ - 720^\circ$$

$$\text{مجموع قياسات الزوايا الخارجية} = 360^\circ$$



ćمارين ٦-٤

(١) أكمل الجدول الآتي:

عدد أضلاع المُضلَّع	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
٢٠	
١٢	
١٠	
٩	
٨	
٧	
٦	
٥	

المُضلَّع المُنْتَظَم مُضلع جميع أضلاعه متساوية في الطول وجميع زواياه متساوية في القياس. المُضلَّع غير المُنْتَظَم أضلاعه غير متساوية في الطول وزواياه غير متساوية في القياس.

(٢) أوجد قياس زاوية داخلية واحدة في كل مُضلَّع من المُضلاعات الآتية:

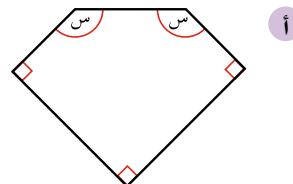
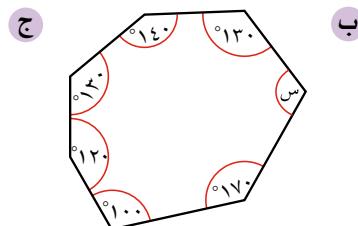
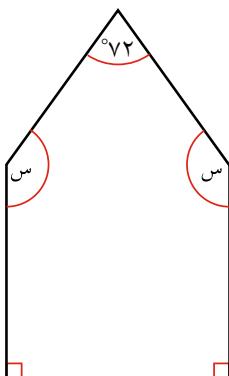
- ب سُداسي مُنْتَظَم
- أ خُماسي مُنْتَظَم
- د عُشاري مُنْتَظَم
- ج ثُمانبي مُنْتَظَم
- ه مُضلَّع مُنْتَظَم له ١٢ ضلعاً
- و مُضلَّع مُنْتَظَم له ٢٥ ضلعاً

(٣) مُضلَّع مُنْتَظَم له ١٥ ضلعاً. أوجد:

- أ مجموع قياسات زواياه الداخلية.
- ب مجموع قياسات زواياه الخارجية.
- ج قياس كل زاوية داخلية.
- د قياس كل زاوية خارجية.

٤) مضلع منتظم له زاوية خارجية قياس كلّ منها 15° . ما عدد أضلاعه؟

٥) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كلّ مضلع من المُضلّعات غير المنتظمة الآتية:



تصحّ قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية وقانون الزوايا الخارجية في كلّ المضلّعات المنتظمة وغير المنتظمة. لكن، في المضلّعات غير المنتظمة، لا يمكنك قسمة مجموع قياس الزوايا الداخلية على عدد الأضلاع لتجد قياس زاوية داخلية، فقد تكون قياسات الزوايا الداخلية كلّها مختلفة.

ملخص

ما يجب أن تعرفه:

- يمكن تصنيف الأشكال الرباعية إلى متوازي أضلاع ومستطيل ومربيع ومعين وشبه مُنحرف وطائرة ورقية (الدالتون)، بحسب خصائصها.
- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي يساوي 360° .
- المُضلّعات أشكال مستوية لها عدة أضلاع، يمكن تسمية المُضلّعات بحسب عدد أضلاعها، مثل الخماسي (٥)، السادس (٦)، الثماني (٨)، والعشري (١٠).
- جميع أضلاع المُضلّعات المنتظمة متساوية في الطول وجميع زواياها متساوية في القياس.
- المُضلّعات غير المنتظمة أضلاعها غير متساوية في الطول، وزواياها غير متساوية في القياس.
- مجموع قياسات زوايا المُضلّع يساوي $(n - 2) \times 180^\circ$ ، حيث n عدد الأضلاع.
- مجموع قياسات زوايا المُضلّع المُحدّب الخارجية يساوي 360° .

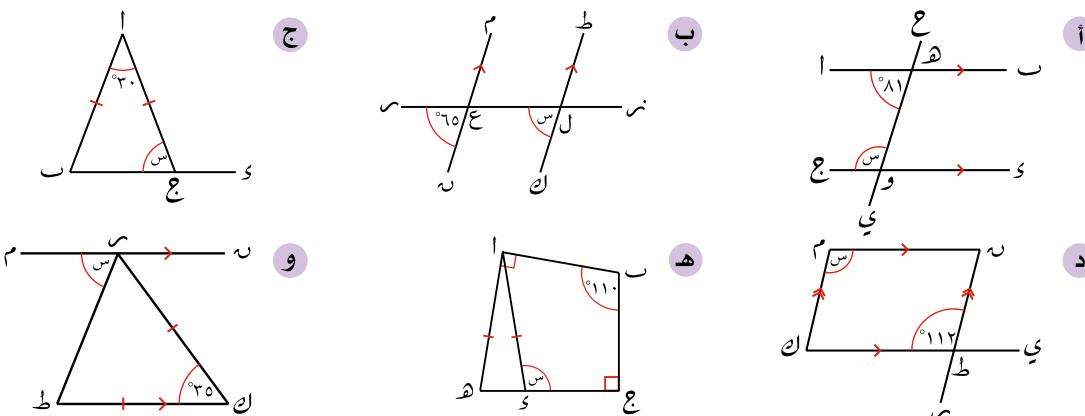
يجب أن تكون قادرًا على:

- حساب قياسات الزوايا المجهولة على الخط المستقيم وحول النقطة.
- حساب قياسات الزوايا المجهولة باستخدام خصائص الزوايا المُتقابلة بالرأس، وعلاقات الزوايا المتعلقة بالخطوط المستقيمة المتوازية.
- حساب قياسات الزوايا المجهولة باستخدام خصائص زوايا المثلثات والأشكال الرباعية والمُضلّعات.
- رسم الخطوط المستقيمة والزوايا، وقياسها بدقة.
- رسم مثلث باستخدام قياسات معطاة.
- رسم المنصف العمودي لقطعة مستقيمة معطاة.
- رسم منصف زاوية معطاة.
- رسم مُضلّع منتظم عدد أضلاعه ٣ أو ٤ أو ٦ أو ٨ في دائرة.

- المصطلحات المتعلقة بأجزاء الدائرة. النقطة هي موقع على شبكة الإحداثيات والقطعة المستقيمة هي أقصر مسافة بين نقطتين.
- يبعد المستقيمان المتوازيان كل منهما عن الآخر بنفس المسافة.
- يتقطع الخطان المستقيمان المتعامدان بزاوية قائمة.
- قياس الزوايا الحادة $< 90^\circ$ وقياس الزوايا القائمة يساوي 90° بالضبط وقياس الزوايا المنفرجة $> 90^\circ, < 180^\circ$. قياس الزوايا المُنفّضة يساوي 180° . قياس الدورة الكاملة يساوي 360° .
- المثلثات مختلفة الأضلاع لا تتضمن أضلاعاً متساوية في الطول ولا زوايا متساوية في القياس. المثلثات متطابقة الضلعين تتضمن ضلعين متساوين في الطول وزاويتين متساوietين في القياس. المثلثات متطابقة الأضلاع فيها ثلاثة أضلاع متساوية في الطول، وتلذت زوايا متساوية في القياس.
- مجموع قياسي الزاويتين المتماًتتين يساوي 90° ، ومجموع قياسي الزاويتين المُكتملتين يساوي 180° .
- مجموع قياسات الزوايا على خط مستقيم يساوي 180° .
- مجموع قياسات الزوايا حول النقطة يساوي 360° .
- تتشكل الزاويتان المُقابلتان بالرأس عند تقاطع خطين مستقيمين وهما متساوietين في القياس.
- عندما يقطع قاطع خطين مستقيمين متوازيين، تتشكل أزواج متوترة من الزوايا. الزاويتان المتأذرتان متساوietان في القياس. والزاويتان المُتبادلتان متساوietان في القياس، والزاويتان المُتحالفتان مُكتملتان.
- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180° .
- قياس الزاوية الخارجية في المثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليةتين المُقابلتين لها.

تمارين نهاية الوحدة

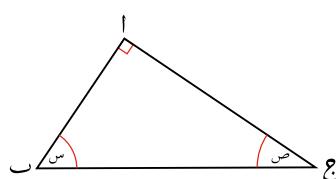
١) أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالحرف (س) في كل شكل فيما يلي. بُرِّر إجاباتك.



٢) ادرس المثلث المجاور ثم:

أ) اشرح لماذا $S + C = 90^\circ$

ب) أوجد قيمة C عندما $S = 37^\circ$



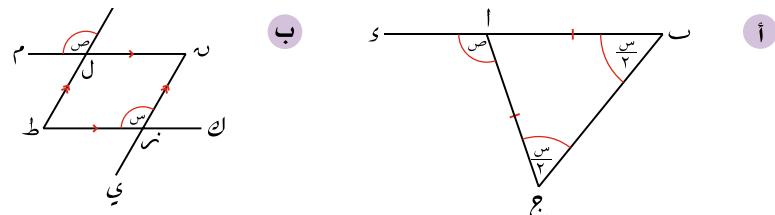
٣) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية في المُضلع الثمانى المُنْظَم؟

٤) مُضلع مُحَدَّب عدد أضلاعه ٢٠ :

أ) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجية؟

ب) إذا كان المُضلع مُنْظَمًا، فما قياس كل زاوية خارجية فيه؟

٥) في كل شكل فيما يلي، اشرح لماذا $S = C$ ؟



٦) باستعمال المسطرة والفرجار أنشئ القطعة المستقيمة AB بنفس طول القطعة المستقيمة في الشكل المجاور، ثم:



ب) ارسم (\hat{AB}) قياسها 75°

ج) ارسم (\hat{AB}) قياسها 125°

٧) أنشئ المثلث TJK الذي أطوال أضلاعه $TJ = 5$ سم، $JK = 4$ سم، $TK = 7$ سم.

الوحدة الخامسة: التقدير والتقرير



المفردات

- | | |
|-------------|---------------|
| Estimate | • التقدير |
| Lower bound | • الحد الأدنى |
| Upper bound | • الحد الأعلى |

سوف تتعلم في هذه الوحدة
كيف:

- تُجري التقديرات من دون استخدام الآلة الحاسبة.
- تجد الحد الأعلى والحد الأدنى للأعداد حتى درجة مُحددة من الدقة.
- تحل مسائل تتضمن حدوداً علية وحدوداً دنيا.

تولى وزارة الأوقاف والشؤون الدينية في سلطنة عُمان اهتماماً كبيراً لبناء المساجد والجوامع التي لها دور رئيسي في حياة سُكّان السلطنة. ففي العام ١٩٩٢م، أمر السلطان قابوس بن سعيد طيب الله ثراه ببناء جامع «السلطان قابوس الأكبر» في العاصمة مسقط، والذي يُعد في غاية الإبداع، خاصة في قبابه وممراته وجدارياته ومنائره ومداخله ونوافذه وحدائقه. يُعطي بناء الجامع مساحة ٤٠٠٠ متر مربع، ويستوعب ما يزيد على عشرين ألف مصلٍ.

تصادفك أحياناً أمور لا يكون مهمّا فيها الحصول على إجابة دقيقة. قد تقرأ أن بناء جامع «السلطان قابوس الأكبر» يُعطي مساحة ٤٠ ألف متر مربع، ولكن من غير المرجح أن تكون تلك المساحة ٤٠ ألف متر مربع بالضبط، فقد تكون أقلّ من ذلك بقليل أو أكثر بقليل. ومن المهم أن تكون قادراً على تقرير الأعداد، وأن تعرف كيف يؤثّر التقرير على دقة الحسابات.

١-٥ تقرير الأعداد

تصادفك عمليات حسابية عديدة لا تكون فيها بحاجة إلى إيجاد الإجابة الدقيقة، وخاصة مع الأعداد العشرية. ولكن قد يطلب منك إعطاء الإجابة إلى مستوى معين من الدقة. كأن يُطلب منك تقرير العدد إلى أقرب منزلتين عشربيتين، أو تقريره إلى عدد مكون من ثلاثة أرقام معنوية.

لتقرير العدد إلى أقرب منزلة عشرية محددة، انظر إلى قيمة الرقم الذي يقع إلى يمين المنزلة التي تقرّب إليها. إذا كانت تلك القيمة أكبر من العدد ٥ أو تساويه، قرّب إلى العدد الأعلى وإذا كانت أصغر من العدد ٥ يبقى العدد كما هو (لا يتغير الرقم).

مثال ١

قرّب العدد $64,839906$ إلى أقرب:

أ عدد كامل

ب منزلة عشرية واحدة

ج ٣ منازل عشرية

الحل:

الرقم الذي يقع في منزلة الآحاد هو ٤

أ $64,839906$

الرقم الذي على يمينه هو ٨، لذا ستقرب إلى الأعلى لتحصل على ٥

$64,839906$

إجابة مقرّبة إلى أقرب عدد كامل

$= 65$ (إلى أقرب عدد كامل)

الرقم الذي يقع في المنزلة العشرية الأولى هو ٨

ب $64,839906$

الرقم الذي على يمينه هو ٣، لذا لا يتغير الرقم ٨

$64,839906$

إجابة مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

$= 64,8$ (منزلة عشرية واحدة)

الرقم الذي يقع في المنزلة العشرية الثالثة هو ٩

ج $64,839906$

الرقم الذي على يمينه هو ٩، لذا ستقرب إلى الأعلى.

$64,839906$

عندما تقرّب ٩ إلى الأعلى، تحصل على ١٠، لذا

$64,839906$

يمكنك أن تضيف ١ إلى الرقم ٣ وتكتب الصفر

مكان الرقم ٩

إجابة مقرّبة إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

$= 64,840$ (٣ منازل عشرية)

لتقرير عدد إلى عدد مكون من ٣ أرقام معنوية، أوجد الرقم المعنوي الثالث، وانظر إلى الرقم الذي يقع إلى يمينه، إذا كان ٥ أو أكبر، أضف واحداً إلى الرقم المعنوي الثالث وأحذف جميع الأرقام الأخرى الواقعة إلى يمينه، وإذا كان أصغر من ٥، دع الرقم المعنوي الثالث من دون تعديل، وأحذف جميع الأرقام الأخرى الواقعة إلى يمينه. وللتقرير إلى رقم معنوي آخر، استخدم الخطوات نفسها ولكن أوجد الرقم المعنوي المناسب لتبدأ به: الرقم الرابع للدالة على ٤ أرقام معنوية، والرقم السابع للدالة على ٧ أرقام معنوية، وهكذا.

الرقم المعنوي الأول في العدد هو أول رقم غير صافي من جهة اليسار. الرقم الذي على يمينه هو الرقم المعنوي الثاني، والرقم الذي على يمينه هو الرقم المعنوي الثالث، وهكذا.

مثال ٢**قرب:**

- أ** ١,٠٧٦ إلى عدد مكون من ٣ أرقام معنوية
ب ٠,٠٠٧٣٦ إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد.

الحل:

الرقم المعنوي الثالث هو ٧؛ الرقم الذي على يمينه هو ٦، لذا قرب ٧ إلى الرقم الأعلى ليصبح ٨
إجابة مقرية إلى عدد مكون من ٣ أرقام معنوية.

أ ١,٠٧٦

= ١,٠٨ (٣ أرقام معنوية)

الرقم المعنوي الأول هو ٧؛ الرقم الذي على يمينه هو ٣، لذا الرقم ٧ لن يتغير.
إجابة مقرية إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد.

ب ٠,٠٠٧٣٦

= ٠,٠٠٧ (رقم معنوي واحد)

تمارين ١-٥

(١) قرب كل عدد إلى أقرب منزلتين عشريتين في كل مما يأتي:

- | | | | | | |
|----------|-------|---------|-------|--------|----------|
| ٠,٩٩٩ | ٢,١٤٩ | ٣٨,٣٤٥٦ | ٠,٠٦٤ | ٣,١٨٥ | أ |
| ٠,٤٢٣٦ | ٨,٢٩٩ | ٤١,٥٦٧ | ٠,٠٠٥ | ٠,٠٤٥٦ | و |
| ١٥,١١٥٧٩ | ٣,٠١٦ | ٣,٠١٦ | ٠,٠٠٩ | ٠,٠٦٢ | ك |

(٢) اكتب كل عدد فيما يلي مقرّباً إلى عدد مكون من:

(١) ٤ أرقام معنوية (٢) ٣ أرقام معنوية (٣) رقم معنوي واحد

- | | | | | |
|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| ٣٢٠,٥٥ | ٦٥٢٢٨ | ١٢٢٠٥ | ٤٥١٢٦ | أ |
| ٧,٣٤٨٧٦ | ١,٠٠٨٧ | ٠,٠٠٠٧٦٥ | ٢٥,٧١٦ | هـ |
| ٠,٠٠٦٤٧٣٥ | ٣١,٠٠٧٧ | ٠,٠٠٩٨٠١٢ | ٠,٠٢٨١٤ | طـ |

(٣) حول العدد الكسري $\frac{25}{9}$ إلى عدد عشري مستخدماً الآلة الحاسبة في كل مما يأتي، ثم اكتب إجابة مقرية إلى أقرب:

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| أ ٣ منازل عشرية | بـ منازلتين عشريتين | جـ منزلة عشرية واحدة |
| دـ ٣ أرقام معنوية | هـ رقمين معنويين | وـ رقم معنوي واحد |

الرقم المعنوي الأول في العدد هو أول رقم غير صفرى موجود فيه عند قراءته من اليسار إلى اليمين.

للحaca

سوف تستخدم التقرير إلى عدد محدد من المنازل العشرية أو إلى عدد معين من الأرقام المعنوية في أغلب المهام الرياضية التي ستقوم بها في هذا العام.

٢-٥ التقدير

من المهم أن تعرف فيما إذا كانت الإجابة التي حصلت عليها قريبة مما توقعته أو لا . يعرض هذا الدرس كيف تحصل على ناتج تقريري للعمليات الحسابية بسهولة .

تمثل إحدى الطرق لإيجاد **التقدير** في تقرير الأعداد التي تستخدمنا قبل أن تجري الحسابات عليها . ورغم أنك تستطيع استخدام أيّ درجة للدقة، إلا أن الأعداد في العمليات الحسابية تُقرّب عادة إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد:

$$8 = 2 \times 4 \approx 2,1 \times 2,9$$

لاحظ أن $2,1 \times 2,9 = 2,19$ ، مما يعني أن القيمة المقدّرة 8 ليست بعيدة عن القيمة الدقيقة!

مثال ٣

قدر قيمة كلّ من:

$$\begin{array}{l} 3,9 + 4,6 \\ \hline 3987 \end{array}$$

الحلّ:

قرب الأعداد إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد.

$$\begin{array}{r} 4 + 5 \\ \hline 400 \\ 0,45 = \frac{4}{10} = \frac{9}{20} \end{array}$$

مساعدة!

لاحظ أن الرمز (\approx) يستخدم عند التقرير فقط . في الحالات الأخرى، أي عندما يتساوى عددان بالضبط، يجب استخدام رمز (=).

إذا استخدمت الآلة الحاسبة الآن، فسوف تجد الإجابة الدقيقة، وتلاحظ أن التقدير كان قريباً جداً.

$$3,9 + 4,6 = 0,426 \quad (3 \text{ أرقام معنوية})$$

في هذا السؤال، ابدأ بتقرير كلّ قيمة إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد، ولكن لاحظ أنك لا تستطيع إيجاد الجذر التربيعي بسهولة إلا للأعداد المربعة فقط! لذا قرّب العدد 35 إلى 36 لتحصل على عدد مربع.

$$\begin{array}{r} 5 - 40 \\ 35 = \frac{5}{40} \approx \frac{6}{40} = \end{array}$$

عند البدء بحل التمارين الآتية، يُفضل البدء بتقرير الأعداد إلى عدد مكون من رقم معنوي واحد. تذكر أنك تستطيع أحياناً جعل حساباتك أكثر سهولة من خلال تعديل الأعداد مرة أخرى.

تمارين ٢-٥

(١) قدر ناتج كل مما يلي (حدد درجة الدقة التي استخدمتها):

$$\frac{4,3}{3,89 \times 0,087} \quad \text{ب}$$

$$\frac{22,6}{1,3} \quad \text{أ}$$

$$\frac{6,01 \times 4,82}{1,09 + 2,54} \quad \text{د}$$

$$\frac{0,46 \times 7,21}{9,09} \quad \text{ج}$$

$$(1,9 - 6,5)(1,89 + 0,45) \quad \text{و}$$

$$\frac{48,7}{4,09 + 2,54} \quad \text{هـ}$$

$$\frac{45,1 - 109,6}{13,9 - 19,4} \quad \text{حـ}$$

$$\frac{20,2 + 22,8}{0,7 + 4,7} \quad \text{زـ}$$

$$\frac{45,1 \times 223,8}{45,1} \quad \text{يـ}$$

$$\frac{48,997 \times 2,52}{99,877 \times 9,267} \quad \text{طـ}$$

$$^4(1,9) \times ^3(4,1) \quad \text{لـ}$$

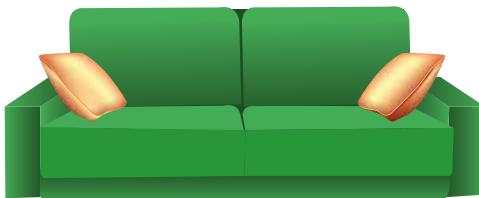
$$\frac{99,877 \times 9,267}{48,997} \quad \text{كـ}$$

(٢) أوجد الناتج الدقيق لكل جزئية في التمارين (١) باستخدام الآلة الحاسبة.

(٣) زجاجة مشروبات غازية كتلتها ٦٤٣ غم. قدر كتلة ٩٥٤ زجاجة من النوع نفسه.

(٤) إذا كان طول الرف الواحد في مكتبة أحمد ١٦,١ م. وأراد أن يضع علباً من الأقراص المدمجة (CD) جنباً إلى جنب على أحد رفوف المكتبة، حيث يبلغ سُمك العلبة الواحدة من الأقراص المدمجة (CD) ٠,٨٢ سم. قدر عدد علب الأقراص المدمجة (CD) التي يمكن أن يضعها أحمد على رف واحد.

٣-٥ الحدود العليا والحدود الدنيا



اشترى عبد الرحمن أريكة وهو يرغب في معرفة إن كان قياسها متناسبًا مع قياس الباب أو لا. قاس عرض الباب (٤٧ سم) وعرض الأريكة (٤٦,٩ سم) واستنتج أن عرض الأريكة مناسب مع وجود ١ مم زيادة. لكن لسوء الحظ، وصلت الأريكة، ولم يكن عرضها متناسبًا مع عرض الباب. ما الخطأ الذي حصل؟

بالنظر مرة أخرى إلى القيمة ٤٧ سم، أدرك عبد الرحمن أنه قرّب القياس إلى أقرب سنتيمتر. أظهر قياس جديد وأكثر دقةً أن عرض الباب، في الحقيقة، قرّب من ٤٦,٧ سم. وأدرك أيضًا أنه قد قرّب قياس الأريكة إلى أقرب مليمتر. قاسها مرة أخرى، ووجد أن قيمتها الفعلية قريبة من ٤٦,٩٥ سم، وهي أكبر من عرض الباب بمقدار ٢,٥ مم.

٣-٥ إيجاد أكبر قيمة ممكنة لقياس تم تقريره وأصغر قيمة ممكنة له

فلنعد من جديد إلى باب عبد الرحمن. لو تم تقرير عرضه (٤٧ سم) إلى أقرب سنتيمتر لكان من المفيد إيجاد أكبر قيمة وأصغر قيمة ممكنة لقياس الفعلي. إذا وضعت القياس ٤٧ سم على خط الأعداد، سوف تلاحظ المجال الممكن للقيم بكل وضوح:



لاحظ أن مجال القيم الممكنة يتوقف، في النهاية العليا، عند العدد ٤٧,٥ سم. وإذا قرّبت العدد ٤٧,٥ سم إلى أقرب سنتيمتر، فستكون الإجابة ٤٨ سم. رغم أن العدد ٤٧,٥ لا يقرّب إلى ٤٧ (إلى أقرب سنتيمتر)، لكنه يظل يستخدم كقيمة عليا. وعليك أن تدرك أن القيمة الصحيحة لقياس العرض قد تكون أي عدد لغایة ٤٧,٥ سم من دون تضمين العدد ٤٧,٥؛ تُسمى أصغر قيمة ممكنة لقياس عرض الباب **الحد الأدنى**. وبالطريقة نفسها تُسمى أكبر قيمة ممكنة لقياس عرض الباب **الحد الأعلى**.

افتراض أن عرض الأريكة (ع)، يُعبر عن مدى القياسات الممكنة على النحو الآتي:

$$47,5 \geqslant u > 46,5$$

عند إيجاد الحدود الدنيا والعليا للأعداد السالبة فإن الحد الأعلى هو المتضمن في الفترة

يبين هذا أن قيمة u تقع بين ٤٦,٥ (متضمنة ٤٦,٥) و ٤٧,٥ (من دون تضمين ٤٧,٥).

مثال ٤

أوجِد الحد الأعلى والحد الأدنى لكلّ من الأعداد الآتية، مراعيًّا مستوى التقريب المبيّن في كلّ حالة.

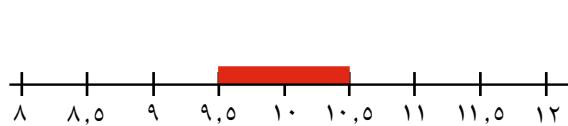
أ ١٠ سم، إلى أقرب سنتيمتر واحدة ب ٢٢,٥ ، إلى أقرب منزلة عشرية واحدة

ج ١٢٨٠٠٠ ، إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية

الحل:

مثُل ١٠ سم على خط الأعداد مع قيمتي أقرب عددين كاملين.

القيمة الحقيقية ستكون الأقرب إلى ١٠ سم إذا وقعت بين الحد الأدنى ٩,٥ سم والحد الأعلى ١٠,٥ سم.

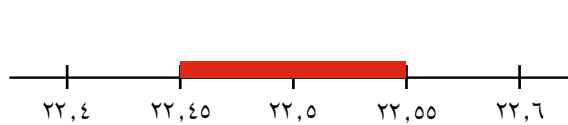


أ

إذا اخْتَلَطَتْ عَلَيْكَ الْأَمْوَارُ عَنْدَ التَّعَالِمِ مَعَ الْحَدَّ الْأَدْنَى وَالْحَدَّ الْأَعْلَى، ارْسِمْ خَطَّ أَعْدَادٍ لِيُسَاعِدَكَ عَلَى إِيجَادِ الإِجَابَةِ.

انظُر إلى العدد ٢٢,٥ على خط الأعداد.

القيمة الحقيقية ستكون الأقرب إلى ٢٢,٥ إذا وقعت بين الحد الأدنى ٢٢,٤٥ والحد الأعلى ٢٢,٥٥



ب

يبَيِّنْ خط الأعداد العدد ١٢٨٠٠٠

يقع العدد ١٢٨٠٠٠ بين الحد الأدنى ١٢٧٥٠٠ والحد الأعلى ١٢٨٥٠٠



ج

(١) أوجِد الحد الأدنى والحد الأعلى لكلّ عدد مقرّبًا إلى أقرب عدد كامل في كلّ مما يأتي:

١٢٧

٧٢ هـ

٩ دـ

١٠٠ جـ

٨ بـ

١٢ أـ

(٢) أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لكل عدد مقرّباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة في كل مما يأتي:

- أ ٢,٧ ب ٥,٠ ج ٣٤,٤ د ١,١ ه ٢,٣- و ٧,٢-

(٣) أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لكل مما يلي، مقرّباً إلى درجة الدقة المبيّنة بين قوسين:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| ب ٣٠٠ (إلى أقرب مائة) | أ ١٣٢ (إلى أقرب عدد كامل) |
| د ١٥ مليون (إلى أقرب مليون) | ج ٤٠٥ (إلى أقرب عشرة) |
| و ٢٦,٧ (منزلة عشرية واحدة) | ه ٣٢,٣ (منزلة عشرية واحدة) |
| ح ١٢,٣٤ (منزلتين عشريتين) | ز ٠,٥ (منزلة عشرية واحدة) |
| ي ١٣٤,٠٣ (أرقام معنوية) | ط ١٣٢ (٣ أرقام معنوية) |

طبق مهاراتك

(٤) قدرت آمنة أن كتلة الأسد ٤٠٠ كغم. إذا كان تقديرها صحيحاً مقرّباً إلى أقرب ١٠٠ كغم، ما الحد الأدنى والحد الأعلى للكتلة الفعلية للأسد؟



(٥) في سباق الركض، ركض نايف مسافة ١٠٠ م في ١٥,٣ ثانية، إذا علمت أن المسافة مقرّبة إلى أقرب متر، والזמן مقرّب إلى أقرب منزلة عشرية واحدة. اكتب الحدين الأدنى والأعلى لكل من:

- أ المسافة الفعلية التي ركضها نايف ب الزمن الفعلي الذي استغرقه نايف.

(٦) حبل طوله ٤,٥ م مقرّب إلى أقرب ٠١ سم. الطول الفعلي للحبل (ل) سم. أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لقيمة الممكنة للطول الفعلي (ل)، واتّبِ الإجابة في صورة ... \geqslant $l >$...

٣-٣-٥ حل مسائل تتضمن الحد الأدنى والحد الأعلى

تُستخدم في بعض الحسابات أكثر من قيمة واحدة مُقرّبة. يعطي الاستخدام الدقيق للحد الأدنى والحد الأعلى لكل قيمة حدًا أدنى وحدًا أعلى صحيحين للإجابة التي يتم إيجادها.

مثال ٥

إذا كان $A = 3,6$ (مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة)، $B = 14$ (مقرّبًا إلى أقرب عدد كامل)، أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لكل من العبارات الآتية:

$$\text{أ} + \text{ب} \quad \text{ب} - \text{أ} \quad \text{ج} \cdot \text{ب} - \text{أ}$$

الحل:

أولاً، أوجد الحد الأعلى والحد الأدنى لكل من (أ)، (ب)	$3,65 \geq A > 3,55$ $14,5 \geq B > 13,5$
عُوض اجمع	$\begin{aligned} \text{أ} &= \text{الحد الأعلى لـ } (A + B) \\ &= \text{الحد الأعلى لـ } (A) + \text{الحد الأعلى لـ } (B) \\ &= 14,5 + 3,65 \\ &= 18,15 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \text{ب} &= \text{الحد الأدنى لـ } (A + B) \\ &= \text{الحد الأدنى لـ } (A) + \text{الحد الأدنى لـ } (B) \\ &= 13,5 + 3,55 \\ &= 17,05 \end{aligned}$ $18,15 > (A + B) \geq 17,05 \therefore$
عُوض اضرب	$\begin{aligned} \text{أ} &= \text{الحد الأعلى لـ } (A \cdot B) \\ &= \text{الحد الأعلى لـ } (A) \times \text{الحد الأعلى لـ } (B) \\ &= 14,5 \times 3,65 \\ &= 52,925 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \text{ب} &= \text{الحد الأدنى لـ } (A \cdot B) \\ &= \text{الحد الأدنى لـ } (A) \times \text{الحد الأدنى لـ } (B) \\ &= 13,5 \times 3,55 \\ &= 47,925 \end{aligned}$ $52,925 > (A \cdot B) \geq 47,925 \therefore$

مساعدة!

فكّر جيداً في $b - a$. لتجد الحد الأعلى، يلزمك أن تطرح أصغر عدد ممكن من أكبر عدد ممكن.

٦

$$\text{الحد الأعلى لـ } (b - a)$$

$$= \text{الحد الأعلى لـ } b - \text{الحد الأدنى لـ } a$$

$$3,55 - 14,5 =$$

$$10,95 =$$

$$\text{الحد الأدنى لـ } (b - a)$$

$$= \text{الحد الأدنى لـ } (b) - \text{الحد الأعلى لـ } (a)$$

$$3,65 - 13,5 =$$

$$9,85 =$$

$$10,95 > 9,85 \therefore (b - a) \geq 9,85$$

مساعدة!

لتجد الحد الأعلى لـ $\frac{a}{b}$ ، تحتاج لأن نقسم أكبر قيمة ممكنة لـ (a) على أصغر قيمة ممكنة لـ (b) :

٧

$$\text{الحد الأعلى لـ } \frac{a}{b}$$

$$= \frac{\text{الحد الأعلى لـ } (a)}{\text{الحد الأدنى لـ } (b)}$$

$$\frac{3,65}{13,5} =$$

$$0,2703\dots =$$

$$\text{الحد الأدنى لـ } \frac{a}{b}$$

$$= \frac{\text{الحد الأدنى لـ } (a)}{\text{الحد الأعلى لـ } (b)}$$

$$\frac{3,55}{14,5} =$$

$$0,2448275 \approx$$

$$0,245 =$$

$$0,270 > 0,245 \therefore \frac{a}{b} \geq 0,245$$

عُوض

قرّب إلى أقرب عدد مكون من 3 أرقام معنوية

عُوض

اقسم

عُوض

اقسم

قرّب إلى أقرب عدد مكون من 3 أرقام معنوية

تمارين ٣-٥-ب

(١) إذا كانت: $A = 0.6$ ، $B = 24.1$ ، $C = 145$ ، $D = 24.0$

احسب الحد الأعلى والحد الأدنى لكل من العبارات الجبرية الآتية مقرّباً الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

- | | |
|-----------|-----------------------------|
| أ | A^2 |
| ب | B^2 |
| ج | $C^2 - D^2$ |
| د | $D + A^2$ |
| هـ | $\frac{B}{A}$ |
| زـ | $\frac{C}{D} - \frac{D}{B}$ |
| طـ | $D + C - \sqrt{B}$ |
| وـ | $\frac{A}{D} + B$ |
| حـ | $D - \frac{A}{B}$ |
| يـ | $D - \sqrt{A}$ |

طبق مهاراتك



(٢) يريد سعيد وضع غسالة جديدة تتناسب مع مطبخ المنزل. يبلغ عرض إحدى الفسالات ٧٩ سم مقرّباً إلى أقرب سنتيمتر. لوضع هذه الغسالة في المكان المناسب، يجب عليه تفريغ مكان بإزالة بعض الخزائن بهدف الحصول على أصغر مكان فارغ ممكن.

أ ما العرض الأقل للمكان الفارغ الذي يمكن أن يتتسّب مع عرض الغسالة؟

ب ما العرض الأكثّر للمكان الفارغ الذي يمكن أن يتتسّب مع عرض الغسالة؟

(٣) كيس من السكر يحتوي على ٥٠ كغم أخذ منه ١٢ كغم، وهذا القياس مقرّب إلى أقرب كيلوجرام. أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لكتلة السكر المتبقية في الكيس.

(٤) وتد خيمة طوله ٢٠ سم مقرّباً إلى أقرب سنتيمتر، إذا كان طول الجزء الظاهر منه فوق سطح الأرض ٦٤ سم مقرّباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة. احسب الحد الأعلى والحد الأدنى لطول الجزء الذي يقع تحت سطح الأرض من الود.

(٥) رف طوله ٥٠ سم مقرّباً إلى عدد مكوّن من رقمين معنويين، إذا علمت أن موسوعة علمية تحتوي على ١٢ مجلداً، سُمك كل مجلد منها ٤،١ سم مقرّباً إلى أقرب ملليمتر، فهل يتسع هذا الرف لجميع مجلّدات الموسوعة؟

(٦) سعة كأس ٢٠٠ مل مقرّبة إلى أقرب مليلتر وسعة وعاء كبير ٨٦ لترًا مقرّبة إلى

أقرب لتر. ما العدد الأكبر الممكّن من الكؤوس المملوّة بالماء اللازم، لملء الوعاء؟

ما العدد الأصغر الممكّن من الكؤوس المملوّة بالماء اللازم لملء الوعاء؟

(٧) عمود خشبي طوله ٢ م مقرّبة إلى أقرب سنتيمتر، تقسم إحدى الآلات الأعمدة

الخشبية إلى قطع طول كل منها ١٥ سم مقرّبة إلى أقرب عدد مُكوّن من رقمين

معنويّين. ما أكبر عدد وأصغر عدد مُمكّنين من القطع التي يمكن أن يُقسّم إليهما

العمود؟

(٨) يلعب عُبيد وأحمد لعبة تستدعي من كلّ منهما رمي كرة إلى أبعد مسافة. يُسمح لكلّ

منهما رمي الكرة ثلاث رميات.

بلغت رميات عُبيد: ١٤, ٢ م، ١٦, ٣ م، ١٢, ٨ م

وبلغت رميات أحمد: ١٢, ٤ م، ١٧, ٢ م، ١٣, ٨ م

جميع الرميات مقرّبة إلى عدد مُكوّن من ٣ أرقام معنوية. جمع كلّ منهما كل رمياته

ليحصل على المجموع الكلّي للمسافات. هل يمكنك تحديد اسم الرابع؟

(٩) كُتب على مصعد: 'الحمولة القصوى ٥٠٠ كغم' إذا دخل المصعد ستة أشخاص

كتلهم: ٨٥ كغم، ٩٨ كغم، ٧٩ كغم، ٧٥ كغم، ٩٢ كغم، جميعها مقرّبة إلى

أقرب كيلogram. هل الأشخاص الستة آمنون إذا ركبوا في المصعد معاً؟

(١٠) الكمّية (س) تساوي ٤٥ مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح. والكمّية (ص) تساوي ٩٨

مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح. احسب الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى للكمّية (س) في

صورة نسبة مئوية من (ص) مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

مُلْخَص

ما يجب أن تعرفه:

- إجراء التقدير بتقريب الأعداد في الحسابات إلى عدد مُكونٌ من رقم معنوي واحد.
- لكل قياس مُحدد بدرجة دقة معطاة حد أدنى وحد أعلى، تكون قيمة القياس الفعلية أكبر من الحد الأدنى أو تساويه، وأصغر من الحد أعلى.

يجب أن تكون قادرًا على:

- إيجاد تقدير لعملية حسابية.
- احتساب الحد الأعلى والحد الأدنى لأعداد قريبت إلى درجة مُحددة من الدقة.
- احتساب الحد الأعلى والحد الأدنى في مسألة عندما يتم استخدام أكثر من عدد تم تقريبه.

تمارين نهاية الوحدة

(١) إذا كانت: $a = 0,7$, $b = 6,29$, $c = 196,12$

قدر قيمة كل من العبارات الجبرية الآتية:

$$\frac{a \times b}{c}$$

$$b \times a$$

$$a \times b$$

(٢) إذا كانت: $a = 54,6$, $b = 123$. احسب الحد الأعلى والحد الأدنى لكل من العبارات الجبرية الآتية. قرب إجاباتك إلى عدد مكون من ٣ أرقام معنوية.

$$\frac{b - a}{d}$$

$$\frac{a}{b}$$

$$b \times a$$

$$a + b$$

(٣) إذا كانت قيمة كل من: $s = 2,5$, $u = 4,3$, $c = 5,2$

(١) قدر في كل جزئية من الجزئيات الآتية قيمة العبارة الجبرية (مقربة إلى أقرب عدد كامل).

(٢) أوجد في كل جزئية الحد الأعلى والحد الأدنى للعبارة الجبرية.

$$s \times c$$

$$s + c$$

$$s \times c \times u$$

$$s + c + u$$

$$3s - 2c + u$$

$$\frac{c}{s}$$

$$\frac{s}{c}$$

$$s - c$$

$$u - 2c$$

الوحدة السادسة: المعادلات والمتباينات والصيغ



يعدّ المتحف الوطني في سلطنة عُمان من الصرح الثقافية البارزة في السلطنة، حيث تتجلى فيه مكونات التراث الثقافي منذ ظهور الأثر البشري في شبه الجزيرة العُمانية حتى يومنا الحالي، أنشئ المتحف الوطني في العام ٢٠١٣ م مُراعيًا للمعايير العالمية المُتعارف عليها في تصنيف المتاحف، أما رسوم الدخول إليه فتعتمد على عدّة عوامل، منها الجنسية (مواطن عُماني، مواطن في مجلس التعاون لدول الخليج العربي، مقيم، غير مقيم) والفئة العمرية (كبار السن فوق ٦٠ عامًا، بين ٦٠ و ٦٠ عامًا، الأطفال دون ٦ أعوام)، وغيرها من العوامل، وإيجاد المبالغ (الرسوم) التي يجنيها المتحف عند دخول الزائرين من جنسيات وأعمار مختلفة، تُستخدم العبارات الجبرية والمعادلات.

المفردات

- المعادلة الخطية Linear equation
- العامل المشترك Common factor
- التحليل إلى عوامل Factorise/Factorisation
- المعادلات الآتية Simultaneous equations
- المتباينة Inequality
- الصيغة Formula

سوف تتعلم في هذه الوحدة
كيف:

- تفكّ الأقواس المضروبة في عدد سالب
- تحلّل معادلة خطية
- تُحلّل عبارة جبرية إلى عوامل، عندما تتضمّن عوامل مشتركة بين جميع الحدود
- تعيد تنظيم صيغة بدلالة متغير
- تحلّل معادلات آتية باستخدام التعويض والمحذف
- تحلّل مُتباينات خطية وتعرض النتائج على خط الأعداد

١-٦ فك الأقواس

درست سابقاً عملية فك الأقواس، وهنا سنتعلم فك الأقواس عند التعامل مع الأعداد السالبة.

يجب أن تذكري أن $(+)$ أو $(-)$ تُرافق الحد الذي يليها مباشرة ويجب تضمينها عند فك القوسين.

مثال ١

فك الأقواس ويسطّع العبارات الجبرية في كل ممّا يلي:

$$\text{أ } (-3(s + 4)) \quad \text{ب } 4(ch - 7) - 5(3ch + 5) \quad \text{ج } 8(l + 4) - 10(-l - 6)$$

الحل:

تذكري أن عليك ضرب العدد خارج القوس في كل حد داخله، وأن الإشارة السالبة مرفقة بالعدد ٣

$$\text{لأن } -3 \times s = -3s, \quad -3 \times 4 = -12$$

$$\text{أ } (-3(s + 4))$$

$$= -12 - 3s - 4(s + 4)$$

فك كل قوس أولاً

تذكري أن ثحافظ على الإشارة السالبة في (-5) عند الضرب في القوس الثاني.
جمع الحدود المتشابهة ويسطّعها.

$$\text{ب } 4(ch - 7) - 5(3ch + 5)$$

$$= 4(ch - 7) - 15ch - 25$$

$$= 4(ch - 7) - 15ch - 28 - 15ch = 11ch - 53$$

من المهم أن تلاحظ عند فك القوس الثاني،
يحتاج إلى ضرب العدد (-10) في العدد (-6) ، حيث تكون النتيجة موجبة للحد الثاني.

جمع الحدود المتشابهة ويسطّعها.

$$\text{ج } 8(l + 4) - 10(-l - 6)$$

$$= 8(l + 4) + 10l + 60$$

$$= 8l + 32 + 10l + 60 = 18l + 92$$

مساعدة!

انتبه للأعداد السالبة التي تسبق الأقواس لأنها تحتاج دائماً إلى اهتمام مضاعف. تذكري:

$$(+ \times +) = (+)$$

$$(- \times +) = (-)$$

$$(+ \times -) = (-)$$

تمارين ١-٦

(١) فُكَ الأقواس في كل من العبارات الجبرية التالية ويسْطِ إجابتك قدر الإمكان:

- | | |
|--|---|
| ب - $(3s + 5) - 10$
د - $(4s + 2) - 9$
و - $(4s - 3) - 12$ | أ - $(6s + 3) - 10$
ج - $(2s + 4) - 6$
ه - $(7s - 2) - 4$ |
|--|---|

(٢) فُكَ الأقواس في كل من العبارات الجبرية التالية ويسْطِ إجابتك قدر الإمكان:

- | | |
|---|---|
| ب - $(4s - 4) - 10$
د - $(6s - 5) - 14$
و - $(7s - 6) - 18$ | أ - $(2s + 5) - 2$
ج - $(1s - 3) - 4$
ه - $(7s - 5) - 12$ |
|---|---|

(٣) فُكَ الأقواس في كل من العبارات الجبرية التالية ويسْطِ إجابتك قدر الإمكان:

- | | |
|---|--|
| ب - $(3s - 2) - 4$
ج - $(2s - 3) - 15$
د - $(4s - 5) - 3$
ه - $(2s - 2) - 3$ | أ - $(2s - 3) - 8$
ج - $(2s - 3) - 4$
د - $(5s - 4) - 3$
ه - $(3s - 5) - 3$ |
|---|--|

حاول ألا تجري عدة خطوات دفعية واحدة. بين كل حد في المفهوك، ثم بسط.

٢-٦ تحليل العبارات الجبرية إلى عوامل

تعلّمت بالتفصيل فك الأقواس وكيفية استخدام ذلك في حل بعض المعادلات. قد يكون من المفيد أحياناً تنفيذ العملية العكسية من خلال إعادة وضع الأقواس في العبارة الجبرية.

لتأخذ العبارة الجبرية $12s - 4$ التي تم تبسيطها، لكن لاحظ أن للعددين 12 ، 4 عاملان مُشتراكاً هو العدد 4

$$\text{الآن، } 12 = 4 \times 3, 4 = 4 \times 1$$

$$\therefore 12s - 4 = 4 \times 3s - 4 \times 1$$

$$(4s - 1) =$$

لاحظ أنه تم أخذ العامل المشترك الأكبر (4) خارج القوسين وكتابته قبلهما. تُعرف عملية إعادة كتابة العبارة الجبرية بهذه الطريقة **بالتحليل إلى عوامل**. وقد تم تحليل العبارة $12s - 4$ إلى عوامل وأخذ العامل المشترك لعطي $(4s - 1)$

مثال ٢

حل كلاً من العبارات التالية إلى عوامل:

- أ** $15s + 12n - 30m$
ب $15(s - 2) - 20(n - 2) - 24(b - k)$
ج $36b^2k - 24b^2k - 15(s - 2)$

الحل:

(ع م ك) للعددين 12 ، 15 هو 3 ، ولا يوجد بين س، ص عامل مشترك.

$$\text{لأن } 3 \times 5s = 15s, \\ 3 \times 4n = 12n$$

أ $15s + 12n$

$$= 3(5s + 4n)$$

(ع م ك) للعددين 18 ، 30 هو 6 ،
 (ع م ك) لم ن، م هو م

$$\text{لأن } 6 \times 3n = 18n, \\ 6 \times 5m = 30m$$

ب $18n - 30m$

$$= 6(3n - 5m)$$

(ع م ك) للعددين ٣٦، ٢٤ هو ١٢ ، والعامل المشترك لك٢ ك، ب٢ ك هو ب ك لأن $12 \times 3 = 36$
 $12 \times 2 = 24$

$$\begin{aligned} 36 &= 24 \times 12 \\ 36 &= 24 \times (12 - 2) \\ 36 &= 24 \times 10 \end{aligned}$$

تأكد من أنك أخذت كل العوامل المشتركة. إن لم تأخذها كلها، فإن العبارة الجبرية لن تكون مُحللة إلى عواملها بشكل كامل.

قد تتضمن الحدود عبارة مشتركة لكلا الحدين تحوي أقواساً.

$$\begin{aligned} (ع م ك) للعددين ٢٠، ١٥ هو ٥، \\ (ع م ك) لـ (س - ٢)، (س - ٢) هو \\ (س - ٢) \\ لأن $5 \times (s - 2) = 3 \times (s - 2)$ \\ = ٥ × (س - ٢) × ٤(س - ٢) \\ = ٥(s - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 &= 20 - 5 \\ 15 &= 20 - 2(s - 2) \\ 15 &= 20 - 2s + 4 \\ 5 &= 20 - 2s \end{aligned}$$

انتبه لوضع كل رموز الأقواس.

تمارين ٢-٦

(١) حل كلّاً من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل إن أمكن:

- | | | | | | | | |
|---|-------------|---|------------|---|----------------|---|----------------|
| أ | $3s + 6$ | ج | $16 - 8s$ | ب | $15s - 6$ | د | $25 + 3s$ |
| ه | $2s - 4$ | ز | $27 - 18s$ | و | $3s + 27$ | ح | $32 - 23s$ |
| ط | $2s^2 + 4s$ | ي | $26 - 15s$ | ك | $2s + 4 - s^2$ | ل | $2s + 4 + s^2$ |

(٢) حل كلّاً من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

- | | | | | | |
|---|-------------|---|-----------------|---|--------------|
| أ | $49 - 4s^2$ | ج | $s^3 + 3s$ | ب | $3s^3 + s^2$ |
| ه | $m^2 - 33$ | ز | $36s^3 + 24s^2$ | د | $15b^2 + b$ |
| ط | $21y - 21$ | ح | $b^2k - 4b$ | و | $m^3 - 90$ |

(٣) حل كلّاً من العبارات الجبرية التالية إلى عوامل:

- | | | | | | |
|---|-----------------------------------|---|-----------------------|---|------------------------|
| أ | $4m^2 + 4n^2$ | ج | $m^2 + 6mn + n^2$ | ب | $17ab + 30ba$ |
| ه | $\frac{3}{4}s^4 + \frac{7}{8}s^3$ | ز | $5(s+1)^2 - 4(s+1)^2$ | د | $\frac{1}{2}a^2 + b^2$ |
| ط | $7s^3 - 14s^4 + 21s^2$ | ح | $6s^2 + 2s^3 + 4s^4$ | و | $3(s-4) + 5(s-4)$ |

عندما تأخذ عاملًا مشتركًا، قد تبقى إحدى العبارات في حاجة إلى تبسيط أكثر.

٣-٦ استخدام الصيغ وإعادة تنظيمها

٦-٣-أ صيغ تتضمن عمليات حسابية بسيطة

قد يطلب منك أحياناً كتابة الصيغة بدلاً مُتَغِّير ما، وللقيام بذلك عليك إعادة تنظيم هذه الصيغة مُتَبَعًا الخطوات التالية:

- فك الأقواس إن وجدت.
- استخدام العمليات العكسية لكتابه مُتَغِّير ما بدلاً باقي المُتَغِّيرات.

تُستخدم العمليات العكسية عندما يكون المطلوب "العودة" إلى العمليات "الأصلية".

مثال ٢

اكتب الصيغة $ج = أs + b$ بدلاً المُتَغِّير s

الحل:

أعد تنظيم الصيغة بحيث يصبح الحد الذي يتضمن المُتَغِّير s على يمين إشارة (=).

$$as + b = j$$

اطرح b من كلا الطرفين.
اقسم كلا الطرفين على A

$$\begin{aligned} as &= j - b \\ s &= \frac{j - b}{a} \end{aligned}$$

إذا كان المطلوب الحل من أجل كتابة الصيغة بدلاً (s) أو إيجاد (s)، هذا يعني أن المطلوب هو إعادة تنظيم الصيغة بدلاً المُتَغِّير (s)

مثال ٤

اكتب الصيغة $m = \frac{1}{2}(s + c)$ بدلاً المُتَغِّير s .

الحل:

اضرب كلا الطرفين في العدد ٢ للتخلص من الكسر.
اطرح c من كلا الطرفين.
أعد كتابة الصيغة بحيث تصبح s على يمين إشارة (=).

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}(s + c) \\ \therefore 2m &= s + c \\ \therefore 2m - c &= s \\ s &= 2m - c \end{aligned}$$

مثال ٥

اكتب الصيغة $m = \pi r^2 \times h$ بدلالة المُتغير A .

الحل:

- فكَ القوسين.
- اطرح πr^2 من كلا الطرفين.
- اقسم كلا الطرفين على πr^2 .
- اكتب الصيغة بدلالة (A) .

$$\begin{aligned} m &= \pi r^2 \times h \\ \therefore m &= \pi r^2 h + \pi r^2 h \\ \therefore m - \pi r^2 h &= \pi r^2 h \\ \therefore \frac{(m - \pi r^2 h)}{\pi r^2} &= h \\ \therefore h &= \frac{(m - \pi r^2 h)}{\pi r^2} \end{aligned}$$

ćمارين ٦-٣-١

(١) اكتب كل صيغة فيما يلي بدلالة المُتغير (s) :

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| ب $n = d - s$ | أ $m = s + b - d$ |
| د $as - b = j$ | ج $4s = m$ |
| و $\frac{s}{c} = 3b$ | هـ $d - 2b = ms + j$ |
| حـ $\frac{m}{n} = \frac{s}{d}$ | زـ $m = \frac{d}{s}$ |
| يـ $d = \frac{s}{20}$ | طـ $m = \frac{s^2}{q}$ |

(٢) اكتب كل صيغة فيما يلي بدلالة المُتغير (s) :

- | | | |
|------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| أ $m = 3(s + c)$ | بـ $j = 4(t - s)$ | جـ $c = 3(s - 5)$ |
| دـ $r = 2(r - 3 - s)$ | هـ $m = 4j(s - c)$ | وـ $A = \pi r^2 (h - s)$ |

(٣) اكتب كل صيغة من الصيغ التالية بدلالة المُتغير (A) :

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| أـ $s + A = as + b$ | بـ $L = b + (1 + j)A$ | جـ $b = \frac{A}{A - 5}$ |
| هـ $c = \frac{A + s}{1 + A}$ | دـ $s = \frac{A + c}{A - s}$ | مـ $A = n + 2$ |

(٤) اكتب الصيغة $T = L \times S$ بدلالة المُتغير (L) .

(٥) اكتب الصيغة $F = \frac{RSU}{100}$ بدلالة المُتغير (S) .

(٦) اكتب الصيغة ط = $\frac{1}{2}$ ل س^٢ بدلالة المُتغير (ل).

(٧) اكتب الصيغة م = $\frac{\alpha(d+b)}{2}$ بدلالة المُتغير (ب).

(٨) اكتب الصيغة ح = $\frac{\alpha}{3}$ بدلالة المُتغير (أ).

(٩) اكتب الصيغة ح = $\frac{\pi \times نc^2 \times \alpha}{3}$ بدلالة المُتغير (أ).

(١٠) اكتب الصيغة ص = $\frac{\alpha}{2 + \alpha}$ بدلالة المُتغير (أ).

(١١) اكتب الصيغة الآتية بدلالة المُتغير (ص):

$$\text{ج: } \frac{s+u}{4} = \frac{sc+u}{3} \quad \text{ب: } s = \frac{sc+u}{3} - u \quad \text{أ: } s = \frac{sc}{3} - u$$

طبق مهاراتك

(١٢) إذا كان ح = ط × ع × أ، أوجد قيمة ع عندما ح = ٦٠٠، ط = ٣٤، أ = ٢٦ قرّب إجابتك إلى أقرب منزلتين عشربيتين.

(١٣) إذا علمت أن ح = م × أ. أوجد قيمة أ عندما ح = ١، ٢٦، م = ٤١، ٠؛ قرّب إجابتك إلى أقرب منزلتين عشربيتين.

(١٤) صيغة تحويل درجات الحرارة من الدرجات السيليزية إلى درجات الحرارة بالفهرنهايت هي ف = $32 + \frac{9}{5}s$. أوجد درجة الحرارة بالدرجة السيليزية مقرّبة إلى أقرب درجة عندما ف يساوي:

ج ٢٢

ب ٢١٢

أ ١٠٠

(١٥) أوجد نصف قطر كل قرص من الأقراص الدائرية ذات المساحات (م) المعطاة فيما يلي إذا علمت أن $\pi = 3,14$ مستخدماً الصيغة $M = \pi \times Nc^2$:

ج ٥,٠

ب ١٢٠

أ ١٤

٦-٣-ب صيغ تتضمن مربعات وجذوراً تربيعية

تتضمن بعض الصيغ حدوداً مربعة وجذوراً تربيعية. عند حل المعادلات الآتية، عليك أن تتذكر أن للعدد المربع جذراً تربيعياً موجباً وجذراً تربيعياً سالباً.

مثال ٦

اكتب الصيغة $A s^2 = B$ بدلالة المتغير s

الحل:

$$A s^2 = B$$

$$s^2 = \frac{B}{A}$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{B}{A}}$$

اقسم كلا الطرفين على A

خذ الجذر التربيعي للطرفين للحصول على s

العملية العكسية للجذر التربيعي
 \sqrt{s} هي s^2 ، ولكن لاحظ أن
 $(\sqrt{s})^2$ تعني الجذر التربيعي
 الموجب، أي إن هناك قيمة واحدة
 فقط. إذن، $\sqrt{9} = 3$ فقط
 ولكن، إذا كان $s^2 = 9$ ، فسيكون
 $\pm \sqrt{9} = \pm 3$. تستخدم \pm
 فقط عندما تريد التخلص من
 التربيع.

مثال ٧

إذا كان $nc = \sqrt{\frac{m}{\pi}}$ ، اكتب الصيغة بدلالة المتغير (m)

الحل:

رَبِع كلا الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي.

اضرب كلا الطرفين في العدد π

$$nc = \sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

$$nc^2 = \frac{m}{\pi}$$

$$\pi \times nc^2 = m$$

$$m = \pi \times nc^2$$

تمارين ٦-٣-ب

(١) اكتب كل صيغة فيما يلي بدلالة (s):

ب $s^2 - m = 0$

أ $m = A s^2$

د $\frac{s^2}{m} = A$

ج $m = n - s^2$

و $A = s^2 - B^2$

ه $A = \frac{B s^2}{J}$

ح $\sqrt{s}m = m$

ز $m = \frac{n}{s^2}$

ي $s = \sqrt{m - u}$

ط $A = \sqrt[5]{m}$

ل $A = B + \sqrt{s}$

ك $s = \sqrt{m - u}$

$$\text{ن} \quad \sqrt{s-1} = \sqrt{3s}$$

$$\text{ع} \quad s = \frac{\sqrt{4s-b}}{b}$$

$$\text{م} \quad m = \sqrt{s-b}$$

$$\text{س} \quad \sqrt{s-2} = \sqrt{sc-b}$$

(٢) طور آينشتاين الصيغة $= k s^2$ عندما عمل على النظرية النسبية. اكتب هذه الصيغة بدلاً عنها.

(٣) يمكن التعبير عن نظرية فيثاغورث باستخدام الصيغة $a^2 + b^2 = c^2$. اكتب هذه الصيغة بدلاً عنها.

(٤) يمكن التعبير عن مساحة المربع باستخدام الصيغة $m = l^2$. أعد تنظيم هذه الصيغة لإيجاد طول أحد الأضلاع (l).

طبق مهاراتك

(٥) في الفيزياء، يمكن إيجاد الطاقة الحركية (ط) للجزيء باستخدام الصيغة $\text{ط} = k s^2$ ، حيث (k) كتلة الجُزيء، و(s) سرعة الجُزيء:

أ أوجد قيمة ط عندما $k = 8$ ، $s = 2,5$.

ب بين كيف تُعيد تنظيم الصيغة لكتابتها بدلاً عنها.

(٦) يتم إيجاد حجم الأسطوانة (H) باستخدام الصيغة $H = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{أ}$ ، حيث (نق) نصف قطر قاعدة الأسطوانة و(أ) ارتفاع الأسطوانة:

أ أوجد حجم أسطوانة نصف قطرها $8,0$ م وارتفاعها 1 م، مقرّباً الناتج إلى أقرب سنتيمتر.

ب اكتب الصيغة بدلاً عنها.

(٧) يمكنك استخدام الصيغة $m = \frac{\pi}{4} \text{ق}^2$ لإيجاد (m) مساحة الدائرة، حيث (ق) قطر الدائرة.

أ أوجد مساحة دائرة قطرها $1,2$ م.

ب استخدم الصيغة $m = \pi \text{نق}^2$ لإيجاد مساحة الدائرة نفسها.

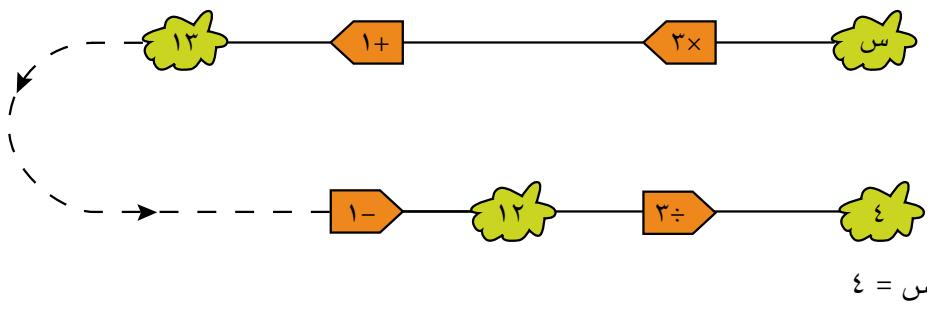
ج عَّبر عن الصيغة $m = \frac{\pi}{4} \text{ق}^2$ بطريقة تسمح لك بإيجاد قطر الدائرة بمعلومية مساحتها.

سابقاً ▶

٤-٦ حل المعادلات

أفكّر في عدد (س)؛ إذا ضرب في ثلاثة، ثم أضف إليه واحد يكون الناتج ١٣
لإيجاد العدد (س)، عليك أولاً فهم مراحل ما يحدث للعدد س، ثم تتنفيذ الخطوات بالترتيب العكسي:

يوضح المخطط التالي (الذي يسمى أحياناً آلة الدالة) مراحل ما يحدث للعدد س، مبيناً الطريقة العكسية المكتوبة أدناه. لاحظ كيف تظهر الإجابة على المسألة بسهولة:



يمكن الحصول على إجابة مُحكمة وفعالة باستخدام الجبر. اتّبع التعليمات في المسألة:

(١) العدد هو س:

(٢) اضرب هذا العدد في ثلاثة:

(٣) ثم أضف واحداً:

(٤) الإجابة هي ١٣ :

تُسمى هذه المعادلة **المعادلة الخطية**. تُشير كلمة 'خطية' إلى حقيقة عدم وجود قوى لـ س غير العدد ١

النقطة التالية التي عليك تعلمها هي أنك تستطيع تغيير المعادلة من دون تغيير الحل (قيمة س التي تجعل المعادلة صحيحة) شرط تفيذ الأمر نفسه لطرف المعادلة في آن واحد.

اتّبع الطريقة العكسية المبينة في مخطط آلة الدالة السابق، شرط تفيذ التعليمات نفسها على طرف المعادلة:

$$13 = 1 + 3^s$$

(اطرح واحداً من كلا الطرفين)

$$13 - 1 = 1 - 3^s$$

$$12 = 1 - 3^s$$

(اقسم كلا الطرفين على ٣)

$$\frac{12}{3} = \frac{1 - 3^s}{3}$$

$$4 = 1 - 3^s$$

من المهم أن تذكر قواعد ترتيب العمليات الحسابية قبل البدء بهذا الدرس. ▶

رابط

تُستخدم الرياضيات في المحاسبة بشكل كبير. حيث يستخدم المحاسبون جداول البيانات الحاسوبية ليحسبوا البيانات المالية ويحلّوها. ورغم أن البرامج تقوم بالحسابات، إلا أن على المستخدم معرفة المعادلات والصيغ التي يجب عليه إدخالها ليخبرها بالمطلوب منها.

حتى وإن كان بإمكانك معرفة الحل بسهولة، فعليك إظهار خطوات العمل.

حاول دائمًا محاذاة إشارة (=) رأسياً، لأن ذلك يبيّن عملك بشكل أوضح.

ستجد أحياناً أن المعادلات الخطية تتضمن أقواساً، وقد تتضمن قيمة مجهولة (مثل س، بالرغم من إمكانية استخدام أي حرف أو رمز آخر) في الطرفين معاً.
يوضح المثال الآتي عدداً من أنواع المعادلات الممكنة.

مثال ٨

معادلة تتضمن س في طرفيها، وتكون للحدود س الإشارة نفسها:

$$\text{أ} \quad \text{حل المعادلة } 5s - 2 = s^3 + 6$$

الحل:

ابحث عن أصغر معامل لـ س واطرمه من كلا الطرفين.
اطرح ٣ س من كلا الطرفين.
أضف ٢ إلى كلا الطرفين.

اقسم كلا الطرفين على ٢

$$\begin{aligned} 5s - 2 &= s^3 + 6 \\ 5s - 2 - 3s &= s^3 + 6 - 3s \\ 2s - 2 &= s^3 + 6 \\ 2 + 2 &= 2 + s^3 \\ 4 &= s^3 \\ 4 &= s \end{aligned}$$

معادلة تتضمن س في طرفيها وتكون للحدود س إشارات مختلفة:

$$\text{ب} \quad \text{حل المعادلة } 5s + 11 = 20 - s^2$$

الحل:

أضف ١١ س إلى كلا الطرفين.

اطرح ١٢ من كلا الطرفين.

اقسم كلا الطرفين على ٦
بسط الكسر

$$\begin{aligned} 5s + 11 &= s^2 - 20 \\ 5s + 11 + 11s &= s^2 - 20 + 11 \\ 16s &= s^2 - 9 \\ 16s + 9 &= s^2 \\ 8 &= s^2 \\ \frac{8}{16} &= s \\ \frac{1}{2} &= s \end{aligned}$$

عند إضافة ١١ س إلى الطرفين،
ستلاحظ أن ما تبقى هو حد س موجب. يساعدك ذلك على تجنب الأخطاء عند وجود إشارة (-).

معادلة تتضمن أقواساً في أحد الطرفين على الأقل:

$$\text{ج حل المعادلة } 2(ص - 4) + 4(ص + 2) = 30$$

الحل:

فك الأقواس وجمع الحدود المتشابهة معاً.

اقسم كلا الطرفين على 6

$$2(ص - 4) + 4(ص + 2) = 30$$

$$2ص - 8 + 4ص + 8 = 30$$

$$6ص = 30$$

$$\frac{6ص}{6} = \frac{30}{6}$$

$$ص = 5$$

معادلة تتضمن كسراً:

$$\text{د حل المعادلة } \frac{6}{7}ل = 10$$

الحل:

اضرب كلا الطرفين في 7

$$7 \times 10 = 7 \times \frac{6}{7}ل$$

اقسم كلا الطرفين على 6
اكتب الكسر في أبسط صورة.

$$70 = 6ل$$

$$\frac{35}{3} = \frac{70}{6} ل$$

ما لم يطلب منك السؤال أن تجد الجواب إلى درجة محددة من الدقة، فإن من المقبول أن تترك الجواب في صورة كسر.

يُطلب إليك أحياناً إيجاد قيمة الأس الذي يعطي نتيجة معطاة. والمعادلة التي تطلب منك إيجاد الأس تُسمى المعادلة الأسيّة.

مثال ٩

أوجد قيمة س إذا كان $س^2 = 128$

الحل:

يمكنك هنا استخدام طريقتين:

- ١) إعادة كتابة 128 في صورة أس لأساس ($\text{العدد } 2$ في هذه الحالة)، أي $س^2 = 72$ وس = ٧
- ٢) إيجاد قيمة س عن طريق التجربة والخطأ.

$$س^2 = 128$$

$$س^2 = 72$$

$$\therefore س = 7$$

تمارين ٦-٤

(١) حل كلًّا من المعادلات التالية:

ب $2 = 4s + 8$

أ $21 = 3s + 4$

د $66 - 4s = 7$

ج $53 - 1s = 6$

هـ $102 - 19 = 11s$

ـهـ $52 = 7 + 9s$

ـحـ $106 = 3t + 206$

ـزـ $14 = 7 - 12t$

ـيـ $8 = 1 + \frac{2}{3}s$

ـطـ $8 = \frac{1+2}{3}s$

ـلـ $\frac{s+2}{2} = s$

ـكـ $21 = \frac{3}{5}s + 11$

ـنـ $\frac{3s+5}{2} = 2s$

ـمـ $\frac{2s-1}{3} = 3s$

(٢) حل كلًّا من المعادلات التالية:

ـبـ $11s + 1 = 7s + 11$

ـأـ $12s + 1 = 7s + 11$

ـدـ $11s + 1 = 12 - 4s$

ـجـ $6s + 1 = 3s - 8$

ـهـ $\frac{1}{4}s - 7 = \frac{1}{2}s + 8$

ــهــ $8 - 8s = 9 - 6s$

(٣) حل كلًّا من المعادلات التالية:

ـبـ $14 = (1+2)s$

ـأـ $12 = (4s+1)$

ـدـ $15 = (2-m)s$

ـجـ $40 = (2t+3)s$

ـهـ $(2s-4)(b-2) = (2+b)(7+1)$

ــهــ $20 = (6-n)s$

ــزــ $10 = (2s+5) - (3s+2)$

(٤) حل كلًّا من المعادلات التالية لتجد قيمة s :

ـبـ $14 = (s-2) + (2s+5)$

ـأـ $7(s+1) = 4(s+5)$

ــجــ $7s - (3s+5) = 6 - (11+2s)$

ــهــ $3(s+1) = 2(s+2) + 4(2-s)$

مساعدة

تكون بعض الأعداد في كل مُعادلة قوى لأن أساس العدد نفسه. أعد كتابتها في صورة قوى واستخدم قوانين الأساس.

(٥) حل كلاً من المعادلات التالية لتجد قيمة س:

$$32 = 4^s + 2 \quad \text{ب}$$

$$27 = 3^s \quad \text{أ}$$

$$4^s - 2 = s + 1 \quad \text{د}$$

$$625 = (5^s + 1) \quad \text{ج}$$

$$27 = 3^s + 4^s \quad \text{هـ}$$

(٦) أوجد قيمة س في كل من المُعادلات التالية:

$$81 = 3^{-s} \quad \text{ج}$$

$$14 = 196^{-s} \quad \text{بـ}$$

$$64 = 2^{-s} \quad \text{أـ}$$

$$81 = 3^{-s-1} \quad \text{وـ}$$

$$\frac{1}{64} = 2^{-s} \quad \text{هـ}$$

$$256 = 4^{-s} \quad \text{دـ}$$

$$2 = 64^{-s} \quad \text{طـ}$$

$$81 = 3^{-s-3} \quad \text{حـ}$$

$$\frac{1}{81} = 9^{-s} \quad \text{زـ}$$

$$\frac{1}{64} = 4^{-s} \quad \text{يـ}$$

٥-٦ المُعادلات الخطية الآنية

سبق لك أن تعلّمت كيف تحل مُعادلات خطية بمجهول واحد جبرياً . تحتاج الآن إلى متابعة كيفية حل زوج من المُعادلات التي تتضمن مجهولين.

سوف تتعلّم طريقتين لحل المُعادلات الخطية الآنية:

- الحل باستخدام التعويض
- الحل باستخدام الحذف

حل المُعادلات الخطية الآنية باستخدام التعويض

يمكنك حل المُعادلات باستخدام التعويض، وذلك بكتابة أحد المُتغيّرين (س) بدلاًلة المُتغيّر الآخر (ص) باستخدام إحدى المعادلتين، ثم تعويضه في المعادلة الأخرى.

مثال ١٠

حل آنِيَاً باستخدام التعويض:

$$(1) \quad 3s - 2c = 29$$

$$(2) \quad 4s + c = 24$$

الحل:

اكتب ص بدلاًلة س

عوض المعادلة (٢) في المعادلة (١) باستبدال

$$c = 24 - 4s$$

تخلّص من القوسين.

اجمع ٤٨ إلى طرفي المعادلة.

اجمع الحدود المتشابهة.

اقسم كلا الطرفين على ١١

$$4s + c = 24$$

$$c = 24 - 4s$$

$$(1) \quad 3s - 2c = 29$$

$$3s - 2(24 - 4s) = 29$$

$$3s - 48 + 8s = 29$$

$$11s = 77$$

$$s = 7$$

الآن عوض عن قيمة س في أيٍ من المعادلتين لتتجد قيمة ص. المعادلة (٢) هي الأسهل، لذلك استخدمها.

اكتب قيمتي س، ص

$$c = 24 - 4(7)$$

$$c = 28 - 28$$

$$c = -4$$

$$s = 7, c = -4$$

تم ترقيم المُعادلات بحيث يمكنك التعرّف إلى كل منها بطريقة فعالة. عليك أن تفعل ذلك دائمًا.

تحقق من قيمتي s ، c بالتعويض في المعادلين الأصليين.

$$\begin{aligned} 3s - 2c &= 29 \\ \checkmark 29 &= 2(-7) + 4(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4s + c &= 24 \\ \checkmark 24 &= 4(-7) + (-4)(-2) \end{aligned}$$

حل المعادلات التبديلية الخطية باستخدام الحذف

يمكنك أيضًا حل المعادلين بحذف أحد المتغيرين، وذلك بجمع المعادلين معًا أو طرحهما بهدف التخلص من أحد المتغيرين.

مثال ١١

حل المعادلين الخطيين الآتيين آنئًا باستخدام الحذف:

$$(1) \quad s - c = 4$$

$$(2) \quad s + c = 6$$

الحل:

اجمع المعادلين.

(1)

$$s - c = 4$$

(2)

$$\begin{array}{r} s + c = 6 \\ \hline 10 = 2s \end{array}$$

لاحظ أن المعادلة الناتجة من عملية الجمع لم تعد تحتوي على (c) ، ونتجت معادلة خطية بمتغير واحد.

$$\begin{aligned} 10 &= 2s \\ 5 &= \frac{1}{2}s \\ s &= 5 \end{aligned}$$

عوض عن قيمة s في إحدى المعادلين، المعادلة (2)
لإيجاد قيمة c .

$$\begin{aligned} s + c &= 6 \\ 5 + c &= 6 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

تحقق من أن قيمتي (s) و (c) تحققان المعادلة (1)

$$s - c = 5 - 1 = 4$$

يعرض المثال التالي حالة مختلفة، تحتاج فيها إلى طرح المُعادلتين بدلاً من جمعهما، أو تحتاج إلى ضرب إحداها أو كليهما في عدد ما، قبل اعتماد الجمع أو الطرح.

مثال ١٢

حل المُعادلتين الخطيتين الآتیتين آنیاً:

$$(1) \quad 4s + c = 1^-$$

$$(2) \quad 7s + c = 4^-$$

الحل:

لاحظ الآن أن لديك المعاملات نفسها لـ c ، ولكن هذه المرة كان للحدود (s) الإشارة نفسها. تستخدم الآن حقيقة أن $s - c = 0$ ، وبناء على ذلك اطرح إحدى المُعادلتين من الأخرى.

$s - c$ أكبر مما c في المعادلة (2) من المعادلة (1)

لذا اطرح المعادلة (1) من المعادلة (2)

$$(2) \quad 7s + c = 4^-$$

$$(1) \quad 4s + c = 1^-$$

$$\underline{3s = }$$

$$\Leftrightarrow s = 1^-$$

وُضِحَ دائمًا المُعادلة التي تختارها لتطرحها من المُعادلة الأخرى.
هنا استخدمت حقيقة أن $3^- - 4^- = 1^-$

عَرَضْ بقيمة $s = 1^-$ في المعادلة (1)

$$4s + c = 1^-$$

$$4(1^-) + c = 1^-$$

$$c = 3$$

تحقّق من أن القيمَيْن $s = 1^-$ ، $c = 3$ تُحقّقان المُعادلة (2)

$$7s + c = 7(1^-) + 3 = 3 + 7^- = 4^-$$

مُعالجة المُعادلات قبل حلّها

تحتاج أحياناً إلى المُعالجة أو إعادة التنظيم لإحدى المُعادلتين أو كليهما، قبل أن تحلّهما آنياً باستخدام الحذف.

مثال ١٣

حل المعادلتين الخطيتين الآتيتين آنياً:

$$(1) \quad 2s - 5c = 24$$

$$(2) \quad 4s + 3c = 4$$

الحل:

في هذه المعادلات الآتية، لم يتساوی معامل s وكذلك معامل c . لكن إذا ضربت المعادلة (١) في العدد ٢، سيساوی معامل s في كلّ منها. تسمى هذه المعادلة بالمعادلة (٣)، ويكون فيها معامل s هو معامل s نفسه في المعادلة (٢)

$$(3) \quad 2 \times (2s - 5c = 24)$$

$$4s - 10c = 48$$

طرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢)

$$4s + 3c = -4$$

$$4s - 10c = 48$$

$$\hline 52 & -13c =$$

$$c = -4$$

اقسم كلا الطرفين على ١٣

عوّض عن قيمة c في المعادلة (١)
لإيجاد قيمة s

$$2s - 5c = 24$$

$$2s - 5(-4) = 24$$

$$2s + 20 = 24$$

$$s = 2$$

تحقق باستخدام المعادلة (٢)

$$4s + 3c = 4 \quad (2) \quad (4) + (2) = 12 - 8 = -4$$

مثال ١٤

حل المعادلتين الخطيتين الآتیتين آنیاً:

$$2s - 21 = 5c \quad (1)$$

$$3s + 4c = 3 \quad (2)$$

الحل:

في هذا النوع من المعادلات، لا يمكن الاختلاف في معاملى س فحسب، بل في معاملى ص أيضاً. لذلك فإن ضرب إحدى المعادلتين فقط لا يحل المسألة.

هنا تحتاج إلى ضرب طرفي كل معادلة بقيمة مختلفة ليتطابق معاملات أو معاملات. من الأفضل هنا أن تختار معالى ص لأن لهما إشارتين مختلفتين، ولأن جمع المعاملين أسهل من طرحهما.

بجمع المعادلتين (١)، (٢)

عوْض عن قيمة س في المعادلة (١) لإيجاد قيمة ص.

تحقق باستخدام المعادلة (٢)

(١)

(٢)

$$2s - 21 = 5c$$

$$3s + 4c = 3$$

(٣)

(٤)

$$4(2s - 21) = 4(5c)$$

$$8s - 84 = 20c \quad \Leftarrow$$

$$3(3s + 4c) = 5$$

$$15s + 20c = 15 \quad \Leftarrow$$

$$8s - 20c =$$

$$\frac{15s + 20c}{69} =$$

$$s = 3$$

$$2s - 21 = 5c$$

$$21 - 5c = 21 \quad \Leftarrow$$

$$5c = 15$$

$$c = 3$$

$$3s + 4c = 3(3) + 4(3) = 12 - 9 = 3$$

مثال ١٥

حل المعادلتين الخطيتين الآتى:

$$(1) \quad 3s - 4c = 10$$

$$(2) \quad 2s + 3c = 4$$

الحل:

في هذا النوع من المعادلات يُعد منطقاً التخلص من الكسور قبل التعامل معهما.
اضرب طرفي المعادلة (١) في ٢

$$(3) \quad 3s - 4c = 20$$

اضرب طرفي المعادلة (٢) في ٤

$$(4) \quad 8s + 12c = 8$$

اطرح المعادلة (٤) من المعادلة (٣)

$$(3) \quad 3s - 4c = 20$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 8s + 12c &= \\ 12c &= \\ 2c &= \end{aligned}$$

عوّض عن قيمة ص في المعادلة (٣) لإيجاد قيمة س.

$$3s - 4c = 20$$

$$20 = 8 + 3s$$

$$12 = 3s$$

$$s = 4$$

تحقق باستخدام المعادلة (٤)

$$8 = 4 - 12 = (4)(2) + (-12)$$

$$\therefore s = 4, c = -2$$

تمارين ٥-٦

- (١) حل المعادلتين الخطيتين الآتى في كل مما يأتي باستخدام التعويض، ثم تحقق من صحة الحل:

ب $2s + c = -14$

ج $c = 6$

أ $c + s = 7$

د $s + c = 3$

د $4s - 2c = 1$

ج $s + 3c = 1$

ج $3s - 2c = -2$

د $c - s = 8$

(١٢) حل المعادلتين الخطيتين الآتيتين في كل مما يأتي باستخدام الحذف ثم تحقق من صحة الحل:

ج) $2s + 5c = 12$

ـ) $2s + 3c = 8$

ب) $-3s + 2c = 6$

ـ) $3s + 5c = 36$

أ) $2s - c = 4$

ـ) $5s + c = 24$

و) $-2s + 5c = 13$

ـ) $2s + 3c = 11$

هـ) $s + 2c = 11$

ـ) $3s + 2c = 15$

دـ) $5s - 2c = 27$

ـ) $3s + 2c = 13$

تذكّر أنك تحتاج إلى المعامل نفسه لـ (س) أو لـ (ص). إذاً كانت لهما الإشارة نفسها، عليك طرح إحدى المعادلتين من الأخرى. لكن إذا كانت لهما إشارات مُختلفتان، فعليك أن تجمع.

(١٣) حل كلاً مما يلي آنئـاً. استخدم الطريقة الأسهـل لك ثم تتحقق من من صحةـ الحل:

جـ) $-3s + c = 5$

ـ) $-6s + 5c = 20$

بـ) $4s + 3c = 25$

ـ) $s + 9c = 21$

أـ) $5s + 3c = 22$

ـ) $1s - c = 16$

وـ) $4s - 3c = 11$

ـ) $2s - 9c = 5$

هـ) $6s + c = 11$

ـ) $2s + 2c = 1$

دـ) $s + c = 10$

ـ) $3s + 5c = 40$

طـ) $2s + c = 7$

ـ) $11 + s = 2c$

حـ) $3s + 4c = 1$

ـ) $10s + 2c = 11$

زـ) $s = 12 + c$

ـ) $2s = 3 - c$

(٤) حلـ المعادلـتين الخطـيتـين الآتـيتـين في كلـ مما يـأتـي:

بـ) $\frac{3}{7}s - \frac{5}{8}c = \frac{1}{23}$

ـ) $14s - 17c = \frac{1}{12}$

أـ) $\frac{1}{5}s + \frac{2}{3}c = \frac{6}{1}$

ـ) $\frac{3}{4}s - \frac{1}{7}c = \frac{13}{5}$

دـ) $\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}c = 0$

ـ) $2s - \frac{1}{4}c = 14$

جـ) $\frac{2}{17}s + \frac{3}{4}c = 1$

ـ) $\frac{13}{22}s - \frac{2}{3}c = 4$

وـ) $3 - \frac{6}{7}c = s$

ـ) $s - \frac{5}{2}c = 2$

هـ) $4c + s + 5 = 0$

ـ) $s = 5 - c$

ـ) $c = 3s - 6$

ـ) $2s + \frac{3}{7}c = 5$

زـ) $2s + \frac{c}{2} = 3$

ـ) $6s = 2c$

طـ) $5 = \frac{2}{7}s + \frac{3}{13}c$

ـ) $\frac{3}{5}s + \frac{1}{3}c = 0$

إذاً تضمنـتـ المـعادـلةـ كـسورـاً، يمكنـكـ جـعلـ الـأـمـورـ أـكـثـرـ سـهـولـةـ بـأـنـ تـضـرـبـ كـلـ حـدـ فـيـ عـدـ مـنـاسـبـ (ـمـقـامـ مشـترـكـ). كـيـ تـتـخلـصـ، مـنـ الـكـسـورـ أـولـاًـ.

(٥) اكتب زوجاً من المعادلات الآنية لكلّ موقف مما يلي، واستخدمه لحل المسألة. سُمّ الأعداد المجهولة (س)، (ص):

- أ** عددان مجموعهما ١٢٠ وأحدهما يساوي ٣ أمثال الآخر. أوجد العددين.
- ب** عددان مجموعهما ٣٤ والفرق بينهما ٥، أوجد العددين.
- ج** عددان مجموعهما ٥٢ والفرق بينهما ١١، أوجد العددين.
- د** شخصان مجموع عمريهما ٣٤. إذا كان أحدهما أصغر من الآخر بـ ٦ سنوات، فكم يبلغ عمر كل منهما؟

فَكَرْ بِرُوْيَةً فِي هَذِهِ الْمَسَائِلِ وَفِي
كِيفِيَّةِ تَبَيِّنِ الْمَسَائِلِ الَّتِي تَضَمَّنُ
مُعَادِلَاتٍ آنِيَّةً، خَاصَّةً إِذَا لَمْ يَطْلُبْ
مِنْكَ اسْتِخْدَامَ طَرِيقَةً مُحَدَّدَةً فِي
حَلَّهَا.

(٦) باع متجر حواسيب ٤ محركات أقراص صلبة و ١٠ محركات حفظ صغيرة بمبلغ ٢٠٠

ريال عماني. وباع ٦ محركات أقراص صلبة و ١٤ محرك حفظ صغيراً بـ ٢٩٠ ريالاً عمانيّاً. أوجد ثمن محرك القرص الصلب وثمن محرك الحفظ الصغير.

(٧) ملعب رياضي كبير يحتوي على ٢١٠٠ مقعد. رتب المقاعد في أقسام يتسع بعضًا

منها على ٤٠٠ مقعد كما يتسع بعض أقسامها على ٤٥٠ مقعداً. إذا علمت أن عدد الأقسام التي تتسع على ٤٥٠ مقعداً يساوي ثلاثة أمثال عدد الأقسام التي تتسع على ٤٠٠ مقعد، فكم قسمًا يتضمن الملعب؟

٦-٦ كتابة المعادلات لحل المسائل

٦-٦-١ حل مسائل بسيطة

تعلّمت سابقاً أنك تستطيع تحويل المسائل اللفظية إلى **معادلات** باستخدام **المتغيّرات**، لتمثيل الكمّيات المجهولة. وتستطيع بعد ذلك حلّ **المعادلة** لإيجاد حل المسألة.

سيساعدك العمل على التمارين ٦-٦-١ لتذكّر كيف تكتب **المعادلات** التي تمثل المجموع والفرق وناتج الضرب وناتج القسمة للكمّيات، واستخدامها في حل المسائل.

تمارين ٦-٦-١

(١) اكتب لكل جملة من الجمل الآتية **معادلة** بدلاً عنها، ثم حلّها:

- أ عدد مضروب في العدد ٤ يعطى ٣٢
- ب ناتج ضرب عدد في العدد ١٢ يعطى ٩٦
- ج إضافة عدد إلى العدد ١٢ يعطى ٥٥
- د مجموع عدد مع العدد ١٣ هو ٢٥
- ه ناتج طرح ستة من عدد يعطى ١٤
- و ناتج طرح عدد من تسعة يعطى ٥
- ز ناتج قسمة عدد على سبعة هو ٢,٥
- ح ناتج قسمة ٢٨ على عدد هو أربعة.

(٢) حول كل موقف من المواقف الآتية إلى **معادلة** بدلاً عنها. حل كل **معادلة** لإيجاد

قيمة ص:

- أ عدد مضروب في ثلاثة، ثم إضافة خمسة إلى الناتج للحصول على ١٤
- ب ناتج طرح ستة من خمسة أمثال عدد هو ٥٤
- ج إضافة ٤ إلى عدد، ثم ضرب الناتج في ثلاثة للحصول على ١٥٠
- د ناتج طرح ثمانية من نصف عدد هو ٢٧

(٣) حل كل مسألة فيما يلي بكتابة **معادلة**:

- أ عند إضافة خمسة إلى أربعة أمثال عدد، يكون الناتج ٥٧؛ ما العدد؟
- ب إذا طُرح ستة من ثلاثة أمثال عدد، يكون الناتج ٢١؛ ما العدد؟
- ج إذا أضيف أربعة إلى عدد، ثم قسم الناتج على ثلاثة، ثم ضرب الناتج في اثنين للحصول على أربعة. ما العدد؟
- د إذا أُضيف ستة إلى ضعفي عدد، ثم قُسم الناتج على أربعة للحصول على سبعة. ما العدد؟

يعتبر تحويل المعلومات من صيغة لفظية إلى مخطّطات أو **معادلات** من الاستراتيجيات المفيدة لحل المسائل.

رابط

تطبق فكرة أخذ المدخلات ومعالجتها للحصول على المخرجات في البرمجة الحاسوبية.

٦-٦ حلّ مسائل متعددة الخطوات

المسائل المطروحة في تمارين ٦-٦-أ هي مسائل جبرية بسيطة. عليك أن تكون قادرًا على كتابة المعادلات لحل أيّة مسألة. للقيام بذلك، عليك قراءة المسألة المكتوبة والتحقق من معقوليتها، وتمثيل الموقف في صورة معادلة، ثم حلّها.

لحل المسائل من خلال كتابة المعادلات، نفذ الخطوات الآتية:

- اقرأ المسألة بدقةً منتبهاً للمفردات المستخدمة.
- حدد المطلوب إيجاده والمعلومات المعطاة.
- أسأل نفسك إن كان هناك أي شيء يمكن فرضه أو استنتاجه من المعلومات المعطاة.

مثلاً، إذا بيّنت المسألة أطوالاً متساوية وأعراضًا متساوية في قياسات غرفة، هل يمكنك القول إن الغرفة مستطيلة؟

- خذ في الحساب وجود أيّة صيغة أو علاقة رياضية يمكنك استخدامها لربط المعلومات في المسألة. مثلاً، إذا كان المطلوب إيجاد المسافة حول شكل دائري، يمكنك استخدام الصيغة $m = \pi \times q$ ، وإذا كانت المسألة تتضمّن زمناً ومسافة وسرعة، يمكنك استخدام مثلث الزمن-المسافة-السرعة لتشكيل المعادلة.

مثال ١٦

كانت والدتي تبلغ من العمر ٢٦ عاماً عندما ولدتني. عمر والدتي الآن ثلاثة أمثال عمري. كم عمري الحالي؟ وكم عمر والدتي الحالي؟

الحلّ:

عمر والدتي يساوي ٣ أمثال عمري.
الوالدة أكبر من الولد بمقدار ٢٦ سنة.

ليكن عمري الحالي س.
∴ عمر والدتي الحالي ٣س
الفرق بين العمرين ٢٦ سنة، أي:

$$3s - s = 26$$

$$2s = 26$$

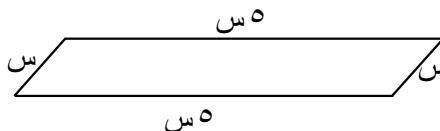
$$\therefore s = 13$$

عمري الآن ١٣، وعمر والدتي الحالي ٣٩

مثال ١٧

متوازي أضلاع طول ضلعه الأكبر يساوي خمسة أمثال طول ضلعه الأصغر . ما طول ضلعه الأكبر وطول ضلعه الأصغر إذا كان محيط متوازي الأضلاع ٩,٦ م ؟

الحل:



طول ضلعه الأكبر يساوي خمسة أمثال طول ضلعه الأصغر .
المحيط هو مجموع أطوال الأضلاع .

ليكن س طول ضلعه الأصغر (بالأمتار) .

∴ طول الضلع الأكبر ٥ س

$$٥ س + س + ٥ س + س = ٩,٦ \text{ م}$$

$$١٢ س = ٩,٦ \text{ م}$$

$$\therefore س = \frac{٩,٦}{١٢} = ٠,٨ \text{ م}$$

طول ضلعه الأصغر ٠,٨ م وطول ضلعه الأكبر $٥ \times ٠,٨ = ٤$ م

تمارين ٦-٦-ب

(١) عمر وليد ثلاثة أمثال عمر ابنته ليلى . إذا كان وليد أكبر من ليلى بمقدار ٣٠ سنة ،
فما عمر وليد؟ وما عمر ليلى؟

(٢) لدى أحمد ومحمود ٤٢٠ كُرة زجاجية . إذا كان لدى أحمد ٥ أمثال ما لدى محمود
من الكرة الزجاجية ، فكم كررة زجاجية يوجد مع كل منهما؟

(٣) يمتلك سامح مبلغًا يقل بمقدار ٥ ريالات عمانية عمّا يمتلكه سليمان ، إذا كان مجموع
ما يمتلكانه ممّا ٩٧,٥٠٠ ريالاً عمانياً ، فكم المبلغ لدى كل منهما؟

(٤) أراد متسابقان تقاسم جائزة مقدارها ٧٥٠ ريالاً عمانياً . إذا حصل المتسابق الأول
على مثلي ما حصل عليه المتسابق الثاني ، فكم المبلغ الذي حصل عليه كل منهما؟

(٥) مستطيل محيطه ٧٤ سم وطوله أكبر من عرضه بمقدار ٧ سم . ما طول المستطيل
وعرضه؟

عندما تواجه مسألة لفظية ، تذكر
اتباع الخطوات الأساسية لحل
المسائل .



(٦) تقع ولاية صحار العُمانية بين ولايتي

صحار وبركاء، إذا كان طول مسار

القيادة بين ولايتي صحار وبركاء

يساوي أربعة أمثال طول مسار

القيادة بين ولايتي صحار وصحار،

وكان طول مسار القيادة بين ولايتي

صحار وبركاء يساوي ١٥٠ كم، فما

طول مسار القيادة بين ولايتي صحار

وصحار؟

(٧) عمر أميرة يساوي ضعف عمر أخيها

بلال. منذ تسعه أعوام، كان مجموع

عمر أميرة وعمر بلال يساوي ١٨

عاماً. ما العمر الحالي لكل منهما؟

(٨) سافر جابر بالسيارة من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) عند الساعة ٦:٠٠ صباحاً،

وقاد سيارته بمُعَدَّل سرعة ٨٠ كم/ساعة. سافر سامر بالسيارة من المدينة (أ) إلى

المدينة (ب) عند الساعة ٨:٣٠ صباحاً. قاد سيارته بمُعَدَّل سرعة ١٠٠ كم/ساعة.

في أي وقت سيلتقي سامر بجابر؟

(٩) قطعت سناة مسافةً ما خلال ٤٠ دقيقة. إذا قطعت نصف المسافة بسرعة

١٠٠ كم/ساعة وقطعت نصفها الآخر بسرعة ٦٠ كم/ساعة، فما المسافة التي

قطعتها سناة؟

٧-٦ المُتباينات الخطية

لقد تعرفت على إيجاد قيمة واحدة لكل مُتغير في المعادلات الخطية، ولكن قد تنشأ أحياناً مواقف لها مدى من الحلول الممكنة. يوسع هذا الدرس العمل السابق مع المُعادلات الخطية لتباحث في المُتباينات الخطية.

٦-٦ خط الأعداد

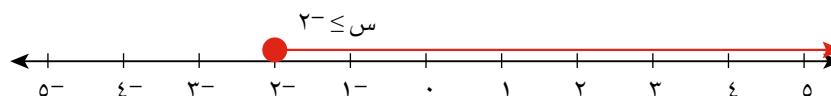
افترض أنك علمت أن $s > 4$ ، هذا يعني أن كل قيمة ممكنة لـ (s) يجب أن تكون أقل من 4، وعليه يمكن لقيم (s) أن تكون $2, 1, 0, -1, \dots$ ولكن هذه ليست جميع القيم ذلك أن $2, 1, 0, -1, \dots$ أيضاً أقل من 4، وكذلك $3, 999, 2, 43, 3, 4, -100, \dots$

إذا رسمت خط الأعداد، يمكنك استخدام سهم لتمثيل مجموعة الأعداد:



يسمح لك خط الأعداد بعرض قيم s الممكنة بوضوح من دون أن تكتبها كلها (يوجد عدد غير منتهٍ من القيم، لذلك لا تستطيع كتابتها كلها). لاحظ أن 'الدائرة المفتوحة' فوق العدد 4 فارغة، يستخدم هذا الرمز لأن من غير الممكن لـ (s) أن تكون مساوية للعدد 4.

الآن افترض أن $s \leq -2$ ، يدل ذلك على أن قيم s يمكن أن تكون أكبر من -2 أو تساويه. يمكنك أن تبيّن أن s قد تساوي -2 بتنظيل الدائرة أعلى العدد -2 على خط الأعداد:



يُبيّن المثال الآتي أنه من الممكن أن يظهر في المسألة أكثر من رمز واحد للمُتباينة.

مثال ١٨

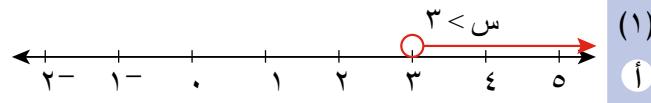
(١) بين مجموعة القيم التي تحقق كلاً من المُتباينات التالية على خط الأعداد.

أ) $s < 3$ ب) $4 > s \geq -1$ ج) $-2 \leq s \leq 8$

(٢) اكتب جميع الأعداد الصحيحة التي تتحقق المُتباينة $4, 2 < s \leq 10, 4$

الحل:

يجب أن تكون قيمة s أكبر من 3 ولا يمكن لـ (s) أن تساوي 3، لذلك لا نُظل الدائرة. 'أكبر' تعني 'إلى اليمين' على خط الأعداد.

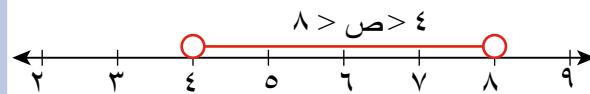


لاحظ أن المتغير المستخدم هنا هو ص، ويجب أن يوضح ذلك على خط الأعداد. وقد استخدمنا أيضًا رمزاً متبادرًا، اللذان يدلان على أن هناك متباينتين، ويجب أن تتحققان معاً.

تدرك $4 < \text{ص}$ على أن ص أكبر من 4 (ولا تساويها).

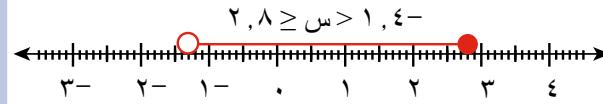
تدرك $\text{ص} > 8$ على أن ص أكبر من 8 (ولا تساويها).

إذن تقع ص بين 4 و 8 (ولا تتضمنهما).



ب

يحتوي المثال على متباينتين يجب أن تتحققان معاً. ص أكبر من $-1,4$ (ولا تساويها)، وص أصغر من $2,8$ (أو تساويها)



ج

(٢) هنا يجب أن تكون قيمة (ص) أعداداً صحيحة أكبر من 4، 2 ولا تساويها، لذا ستكون أصغر قيمة ممكنة لـ (ص) هي 5. كما يجب أن تكون قيمة (ص) أعداداً صحيحة أصغر من 10، 4 أو تساويها. فتكون أكبر قيمة لـ (ص) هي 10؛ إذن تكون القيم الممكنة لـ (ص) هي 5 أو 6 أو 7 أو 8 أو 9 أو 10

تمارين ٦-٧-١

(١) بَيِّن مجموعه القيم التي تتحقق كلاً من المتباينات التالية على خط الأعداد:

ج $l \geqslant 6$

ب $s < 2$

أ $s > 5$

و $s > -4$

ه $k \leqslant -5$

د $\text{ص} < -8$

ز $2,1 < s > 3,5 \quad \text{ح} \quad 2,9 > s > 3,2 \quad \text{ط} \quad 4,5 \geqslant k \geqslant 1,2$

(٢) اكتب جميع الأعداد الصحيحة التي تتحقق كلاً من المتباينات التالية:

ج $27 \geqslant h \geqslant 18$

ب $19 \geqslant h > 7$

أ $13 > b > 3$

و $11,3 > m > 2,5$

ه $3 \geqslant f > 0$

د $3 \geqslant v > 0$

ط $5 \geqslant w \geqslant -18$

ح $\pi > r \geqslant 2$

ز $-7 > s \geqslant -4$

٦-٧-ب حل المُتباينات جبرياً

لتكن المُتباينة $s < 6$

افتراض أن $s = 2$ ، عندها $s = 6$ ولكن ذلك لا يتحقق المُتباينة! من جهة أخرى، أي قيمة s أكبر من 2 تتحقق المُتباينة. مثلاً:

إذا كانت $s = 2, 1$ ، فإن $s = 6, 3$ وهي أكبر من 6

بالطريقة نفسها التي تسمح لك بقسمة طرفي المعادلة على 3، يمكنك قسمة طرفي المُتباينة على 3 لتحصل على الحل:

$$s < 6$$

$$\frac{s}{3} < \frac{6}{3}$$

$$s < 2$$

لاحظ أن الحل هو مجموعة من الأعداد وليس قيمة واحدة، حيث أن أي قيمة s أكبر من 2 تكون صحيحة.

يمكنك أن تحل المُتباينات الخطية كما تحل المعادلات الخطية، رغم وجود بعض الاستثناءات المهمة، وهذا موضح في قسم 'التبيه' الوارد في الصفحة الآتية. الأهم هو أن تتذكر أن ما تتفّذه في أحد طرفي المُتباينة يجب أن تتفّذه في طرفيها الآخر.

مثال ١٩

أوجد مجموعة قيم s التي تتحقق كل مُتباينة من المُتباينات التالية:

أ $3s - 4 > 14 \quad 4(s - 7) \leq 16$

ب $5s - 3 \geq 18 + 4s \quad s - 7 \leq 3$

الحل:

أ $3s - 4 > 14$

أضف 4 إلى كلا الطرفين.

اقسم كلا الطرفين على 3

$$3s > 18$$

$$\frac{3s}{3} > \frac{18}{3}$$

$$\therefore s > 6$$

مجموعة قيم s هي مجموعة الأعداد الأصغر من 6

ب $4(s - 7) \leq 16$

$$4s - 28 \leq 16$$

$$4s \leq 44$$

$$\frac{4s}{4} \leq \frac{44}{4}$$

$$\therefore s \leq 11$$

مجموعة قيم s هي مجموعة الأعداد الأكبر من العدد 11 أو المُساوية له

لاحظ أنك تستطيع أيضاً حل المُتباينة بقسمة كلا الطرفين على ٤ منذ البداية:

اقسم كلا الطرفين على ٤.

أضف ٧ إلى كلا الطرفين لتحصل على الإجابة نفسها كما سبق.

$$\text{حل آخر: } ٤(s - ٧) \leq ١٦$$

$$s - ٧ \leq ٤$$

$$s \leq ١١$$

مجموعه قيم s هي مجموعه الأعداد الأكبر من العدد ١١ أو المساوية له

اطرح الحد s ذا المُعامل الأصغر ($٢s$) من كلا الطرفين، بسط.

أضف ٣ إلى كلا الطرفين.
اقسم كلا الطرفين على ٣

$$٥s - ٣ \geq ١٨ + ٢s$$

$$٥s - ٣ - ٢s \geq ٢s + ١٨ - ٢s$$

$$٣s - ٣ \geq ١٨$$

$$٣s \geq ٢١$$

$$s \geq ٧$$

مجموعه قيم s هي مجموعه الأعداد الأصغر من العدد ٧ أو المساوية له

اطرح ٤ من كلا الطرفين
اقسم كلا الطرفين على -7 واقلب رمز المُتباينة

$$٤ - ٧s \geq ٥$$

$$٤s \geq ٩$$

$$\frac{4s}{7} \leq \frac{9}{7}$$

$$\therefore s \leq -\frac{9}{4}$$

مجموعه قيم s هي مجموعه الأعداد الأكبر من العدد -7 أو المساوية له

ج

د

تبليه

قبل البدء بحل التمرين التالي، يجب الانتباه لوجود قاعدة أخرى عليك تذكرها، كما هو مُبيّن في المُتباينة:

$$18 - 5s < 3$$

$$\Leftrightarrow -5s < 15$$

إذا قسمت طرفي المُتباينة على العدد -5 ، يظهر أن الحل سيكون:

$$s < -3$$

وهذا يعني أن أي قيمة لـ (s) أكبر من -3 تتحقق المُتباينة، مثل $-2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, \dots$

إذا حسبت قيمة -5 لكل قيمة من هذه القيم، ستحصل على $13, 8, 9, -14, -5, \dots$
 $-47, \dots$ ولا تتحقق أي من هذه القيم المُتباينة الأصلية، لأن جميعها أصغر من -18

حاول، إذا أمكن، تجنب إشارة السالب بجمع الحدود أو طرحها.

والحلُّ الصحيح هو:

$$3 - 5 < 18$$

$$\Leftrightarrow 18 < 3 + 5$$

$$5 < 18 - 3$$

$$3 < 5 - 3$$

$$3 - 3 > 5 - 5$$

هذا حلٌّ صحيحٌ والإجابة النهائية شبيهة بالإجابة أعلاه. الفرق الوحيد هو أن إشارة المُتباينَة قد عُكِست. عليك تذكر الآتي:

إذا ضربت طرفي المُتباينَة في عدد سالب أو قسمتهما عليه، فعليك عكس رمز المُتباينَة.

تمارين ٦-٧-ب

أُوجِد حلٌّ كُلٌّ مُتباينَة من المُتباينَات الآتية في أبْسْط صورة ممكنة:

ب) $13 < 13 - s$

أ) $18 > 18 - s$

د) $7 < s - 14$

ج) $s \geq 15 - 14$

و) $2 < s + 1 - 9$

ه) $4 + 8 \leq 20 - s$

ح) $5 - 3 < 2 - s$

ز) $\frac{s}{3} > 2$

ي) $12 - 12 < 14 - 24$

ط) $\frac{s}{3} < 7 + 2$

ل) $10 - 10 < k - 22$

ك) $(s - 4) > 22 - 88$

أُوجِد حلٌّ كُلٌّ مُتباينَة من المُتباينَات الآتية في أبْسْط صورة ممكنة:

ب) $48 > 48 + 5 - f$

أ) $\frac{s+6}{4} < 9$

د) $5 - h - (4 - h) < 5 - (h - 10)$

ج) $5 - j \leq 7 - 18$

و) $\frac{1}{2}(s + 5) \geq 2$

ه) $\frac{s+6}{4} \geq 9$

ح) $5(s - 2) \geq 2(7 - 6) + 6$

ز) $5 - h \geq 7 - 3$

ط) $5(7 - 2) > 1 + (1 - 4)(6 - 4)$

ك) $13 < 7 - \frac{2}{3}s$

ل) $7 < 7 - \frac{1}{7}k$

م) $7 - \frac{1}{9}h < 6 - \frac{1}{9}h$

أُوجِد حلٌّ كُلٌّ مُتباينَة من المُتباينَات الآتية في أبْسْط صورة ممكنة:

ب) $12 < 12 - \frac{2}{3}f$

أ) $12 < \frac{1}{3}f - 2$

د) $2 > \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}$

ج) $12 < \frac{1}{9}f + 2 - \frac{2}{7}f$

هـ) $\frac{1}{4}d + \frac{2}{3}(\frac{1}{3}d - 2) < \frac{1}{7}(\frac{1}{3}d - 3 - 7)$

مساعدة!

تحتاج إلى تذكر كيفية إعادة كتابة الكسر.

مُلْخَص

ما يجب أن تعرفه:

- يجب أن تكون قادرًا على:
- فك الأقواس مع مراعاة وجود إشارات سالبة.
- حل معادلة خطية.
- تحليل عبارات جبرية إلى عوامل بأخذ العوامل المشتركة.
- إعادة تنظيم صيغة.
- حل معادلات خطية آنية جبرياً باستخدام التعويض والحدف.
- حل متباينة بمتغير واحد باستخدام خط الأعداد.
- كتابة معادلات الخاصة واستخدامها لحل المسائل اللفظية.
- كتابة وإعادة تنظيم صيغ أكثر تعقيداً مثل تلك التي تتضمن مربعات وجذوراً تربيعية، أو تلك التي يظهر فيها المتغير في أكثر من حد.

- المعادلة الخطية لا تتضمن متغيرات ذات قوة أكبر من واحد.
- حل معادلة بمتغير واحد يعني إيجاد قيمته.
- عند حل المعادلات، يجب التأكد من تفہیذ العمليات نفسها على الطرفين.
- التحليل إلى عوامل هو عكس فك الأقواس.
- يمكن إعادة تنظيم الصيغة لكتابتها بدالة أحد المتغيرات الموجودة ضمنها.
- آنية يعني في الوقت نفسه.
- يمكن حل المعادلات الخطية الآنية جبرياً.
- للمتغيرات مدى من الحلول.
- يمكن تمثيل المتباينات الخطية على خط الأعداد.
- تفہیذ العبارات الجبرية والمعادلات في تمثيل المواقف وحل المسائل اللفظية.
- عندما تكتب معادلتک الخاصة لتمثيل المسائل، عليك ذكر ما تمثله المتغيرات.
- الصيغة هي معادلة تربط بين المتغيرات.

تمارين نهاية الوحدة

(١) تم مزج ستة لترات من الطلاء الأبيض مع ثلاثة لترات من الطلاء الأزرق، إذا علمت أن سعر الطلاء الأزرق يزيد بمقدار ٢ ريال عماني للتر الواحد عن سعر الطلاء الأبيض، وأن السعر الكلي للمزيج ٢٤ ريالاً عمانياً، أوجد سعر الطلاء الأبيض.



(٢) لدى سارة مجموعة من العملات المعدنية العمانية من فئة ٥ بيسات و ١٠ بيسات. وكان إجمالي ما لديها هو ٥٠٠ قطعة نقود معدنية. إذا علمت أن قيمتها الكلية ٤,٢٠٠ ريالات عمانية، فكم قطعة لديها من كل فئة؟

$$\text{إذا كان } F = \frac{B}{R}, \text{ أوجد } B \text{ عندما } F = 2,5, R = 3,2.$$

(٤) حل إلى عوامل: $2s - 12$

(٥) اكتب الصيغة التالية بدالة المتغير (ر):

$$B = \sqrt[3]{S + R}$$

(٦) فك القوسين: $2(s - 4) - s^2$

(٧) حل إلى عوامل: $6ft + 8fr$

(٨) حل المعادلة: $4(3s - 2) = 28$

(٩) حل المعادلة: $\frac{2}{3}s + 7 = s + 1$

(١٠) إذا علمت أن: $t = 3u - 5$ ، احسب (t) عندما $u = 12$

(١١) يُصبح الطقس أكثر برودة كلما ارتفعت وأنت تصعد جبلاً. تبيّن الصيغة الآتية العلاقة بين الارتفاع ودرجة الحرارة.

$$\text{انخفاض درجة الحرارة (س)} = \frac{\text{التزايد في الارتفاع (م)}}{200}$$

أ) إذا كانت درجة الحرارة تساوي 22°س عند ارتفاع 500 م ، فكم ستكون درجة الحرارة عندما تتسلق وتصل إلى ارتفاع 1300 م ؟

ب) ما الارتفاع الذي يجب أن تسلقه للوصول إلى درجة حرارة 5°س ؟

(١٢) يمكن استخدام الصيغة $H = 2u + 5$ لربط (ع) عدد أضلاع قاعدة المنشور، مع (ح) عدد أضلاع المنشور.

أ) اكتب الصيغة بدالة المتغير (ع).

ب) أوجد قيمة (ع) في منشور يتضمن ٢١ حرفاً.

الوحدة السابعة: المستقيمات



المفردات

- مُعادلة المستقيم
Equation of a line
- الميل
Gradient
- الجزء المقطوع من المحور
y-intercept
- الصادي
Constant
- الجزء المقطوع من المحور
x-intercept
- السيني
Line segment
- القطعة المستقيمة
Midpoint
- نقطة المنتصف
Point of intersection

سوف تتعلم في هذه الوحدة:
كيف:

تُعدّ مدينة صلالة، إحدى ولايات محافظة ظفار، من أهم الوجهات السياحية في سلطنة عُمان، حيث تستقطب السياح من داخل السلطنة وخارجها. تُشتهر صلالة بطبيعتها الرائعة وجمالها المُرتفعة الممتلئة بالأشجار ومياها وشواطئها وأماكنها الأثرية القديمة. عندما تجري مياه الأودية وتصل إلى بعض الأماكن المُرتفعة، يتشكّل ما يُسمّى بالشلال أو المسقط المائي (كما في الصورة أعلاه). وكلّما كان انحدار الأماكن المُرتفعة أكبر، كان ميل الشلال أكبر، وقد يُصبح رأسياً في بعض الحالات.

- تكون جدول قيم وتعين نقاطاً لتشيّر تمثيلات بيانية
- تجد ميل المستقيم
- تجد مُعادلة المستقيم وتُحدّد ميله
- تُحدّد مُعادلة المستقيم مواز لمستقيم آخر معطى
- تحسب ميل مستقيم باستخدام إحداثيات نقاط واقعة عليه
- تجد ميل المستقيمات المُتوازية وميل المستقيمات المُتعامدة
- تجد طول قطعة مستقيمة وإحداثيات نقطة المنتصف لها

١-٧ رسم المستقيمات

١-٧ أ- استخدام المعادلات لرسم المستقيمات

يمتلك محمود شركة لتأجير القوارب. قدم عرضاً للاستئجار يقضي بدفع مبلغ ثابت قيمته ٤٠ ريالاً عمانيّاً ومبلغ آخر قيمته ١٥ ريالاً عمانيّاً بدل كل ساعة استئجار. يمكنك إيجاد صيغة للتكلفة الكلية (ص) ريال عماني بعد مرور زمن (س) ساعة استئجار.

$$\text{التكلفة الكلية} = \text{الرسوم الثابتة} + \text{الرسوم الإجمالية لجميع الساعات}$$

$$ص = ٤٠ + ١٥ \times س$$

$$ص = ٤٠ + ١٥س$$

فكّر الآن في التكلفة الكلية لعدد من ساعات الاستئجار المختلفة.

$$\text{تكلفة ساعة واحدة} = ١٥ + ١ \times ٤٠ = ٥٥ \text{ ريالاً عمانيّاً}$$

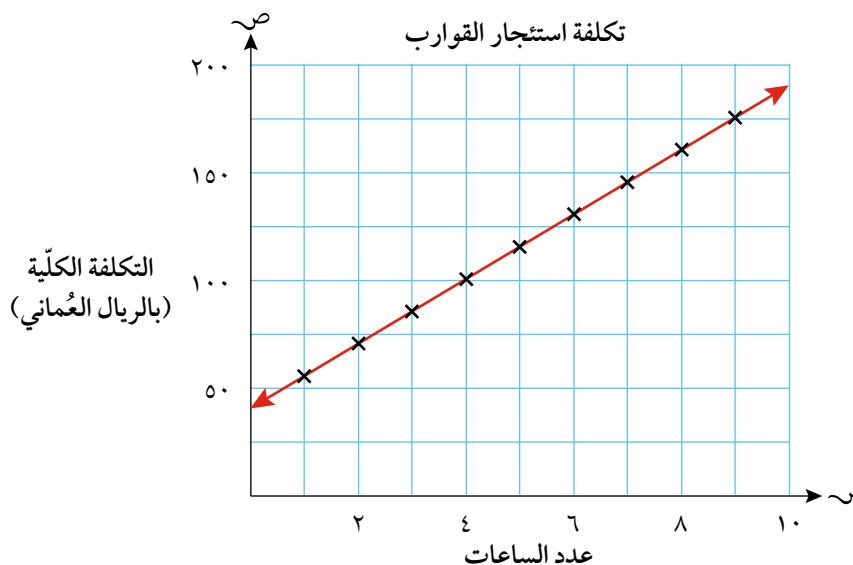
$$\text{تكلفة ساعتين} = ١٥ + ٢ \times ٤٠ = ٧٠ \text{ ريالاً عمانيّاً}$$

$$\text{ثلاث ساعات: التكلفة} = ١٥ + ٣ \times ٤٠ = ٨٥ \text{ ريالاً عمانيّاً}$$

وهكذا.

إذا وضعت هذه القيم في جدول (بالإضافة إلى قيم أخرى)، يمكنك أن تمثّل التكلفة الكلية لعدد ساعات الاستئجار برسم بياني.

عدد الساعات (س)	التكلفة الكلية (ص)
٩	١٧٥
٨	١٦٠
٧	١٤٥
٦	١٣٠
٥	١١٥
٤	١٠٠
٣	٨٥
٢	٧٠
١	٥٥



يُبيّن التمثيل البياني التكلفة الكلية لاستئجارقارب (حدّدت على المحور الرأسي) مع عدد ساعات الاستئجار (على المحور الأفقي). لاحظ أن جميع النقاط تقع على مستقيم. تُخبرك الصيغة $ص = ١٥س + ٤٠$ عن العلاقة بين الإحداثيات (ص) لجميع النقاط الواقعه على المستقيم مع الإحداثيات (س). تُسمى هذه الصيغة **معادلة المستقيم**. وتبين الأمثلة الآتية كيف يمكن رسم المستقيمات باستخدام معادلات مُعطاة.

- لتمثيل المستقيم بيانيًّا باستخدام معادلته:
- كون جدول قيم باستخدام الإحداثيات (س)، (ص) لنقطتين على الأقل (مع أنك قد تعطى نقاطًا أكثر).

- ارسم المحورين السيني والصادي، وحدد مدى قيم (س)، (ص) التي تحتاج إلى استخدامها.

- مثل كل نقطة على المستوى الإحداثي.

- ارسم مستقيماً يصل بين النقط (استخدم مسطرة).

قبل أن تبدأ برسم المحورين، تحقق دائمًا من معرفة قيم (ص) التي تحتاج إلى استخدامها.

مثال ١

مستقيم معادلته $ص = 2س + 3$ ؛ كون جدول قيم لـ (س)، (ص) وارسم المستقيم في المستوى الإحداثي. استخدم أعدادًا صحيحة لقيم (س) تقع من -3 إلى 2 .

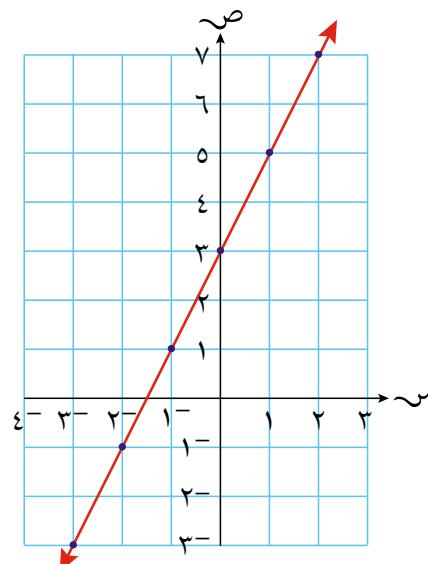
الحل:

عند تعويض القيم $-3, -2, -1, 0, 1, 0, 1, 2$ في المعادلة، تحصل على القيم المعروضة في الجدول التالي:

س	ص
2	7
1	5
0	3
-1	1
-2	-1
-3	-3

لاحظ أن قيمة (ص) تتراوح بين -3 و 7 .

التمثيل البياني للمعادلة $ص = 2س + 3$



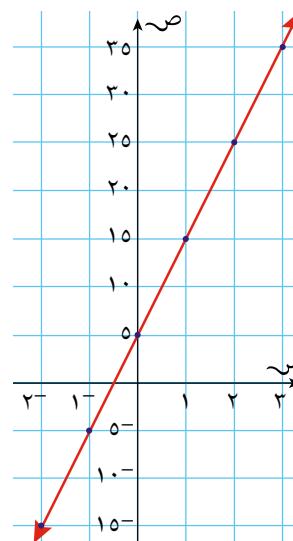
مثال ٢

مثل بيانياً المستقيم الذي معادلته $s = 5s + 10$

الحل:

كُون جدول قيم (يمكن استخدام قيم s من -2 إلى 3):

| s |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ٣ | ٢ | ١ | ٠ | -١ | -٢ | -٣ |



يتبع جدول التمثيل البياني
للمستقيم نمطاً معيناً، لذا يكون
من السهل الآن إكمال جدول
القيم.

انظر إلى قيم s : ستجد أنها
كبيرة جداً مقارنة بقيم s . لذا،
فإن وجود نفس مقاييس الرسم
على المحور السيني والمحور
الصادي سيعطي رسمًا طويلاً
جداً ورفيعاً جداً، تصعب قراءته.
في هذا السياق، من الطبيعي
استخدام مقاييس رسم مختلفتين
على المحورين.

تمارين ١-٧-أ

(١) كُون جدول القييم لكُل مُعادلة من المُعادلات الآتية، حيث تقع s بين -3 ، 0 ، 3 ، ثم مثل كل مُعادلة بيانياً.

ب) $s = 2s - 1$

أ) $s = 3s + 2$

د) $s = 6 - s$

ج) $s = -2s + 1$

و) $s = -3$

هـ) $s = \frac{1}{2}s + 1$

ح) $s = s$

ز) $s + s = 4$

(٢) كُون جدول القييم لكُل مُعادلة من المُعادلات الآتية. استخدم قيم s : -3 ، 0 ، 3 ، ثم مثل كل مُعادلة بيانياً.

ب) $s = -s + 2$

أ) $s = s + 2$

د) $s = -s - 2$

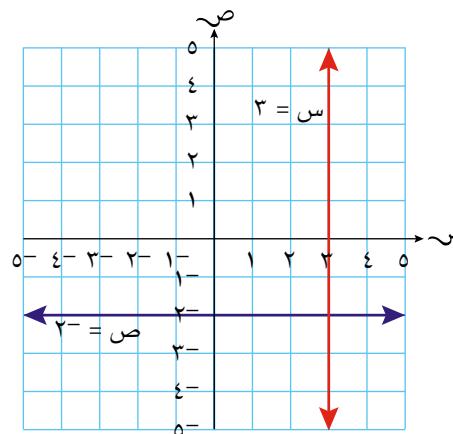
ج) $s = s - 2$

(٣) استخدم الرسوم البيانية من التمرين (٢) للإجابة عن الأسئلة الآتية:

- أين تتقاطع المستقيمات مع المحور السيني؟
- أي المستقيمات تميل إلى الأعلى من اليسار إلى اليمين؟
- أي المستقيمات تميل إلى الأسفل من اليسار إلى اليمين؟
- أي المستقيمات تتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٠، ٢)؟
- أي المستقيمات تتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٢، ٠)؟
- هل تقع النقطة (٢، ٣) على أي من تلك المستقيمات؟ إذا كانت كذلك، فعلى أي مستقيم تقع؟

١-٧- بـ المُسْتَقِيمَاتُ الرَّأْسِيَّةُ وَ الْأَفْقَيَّةُ

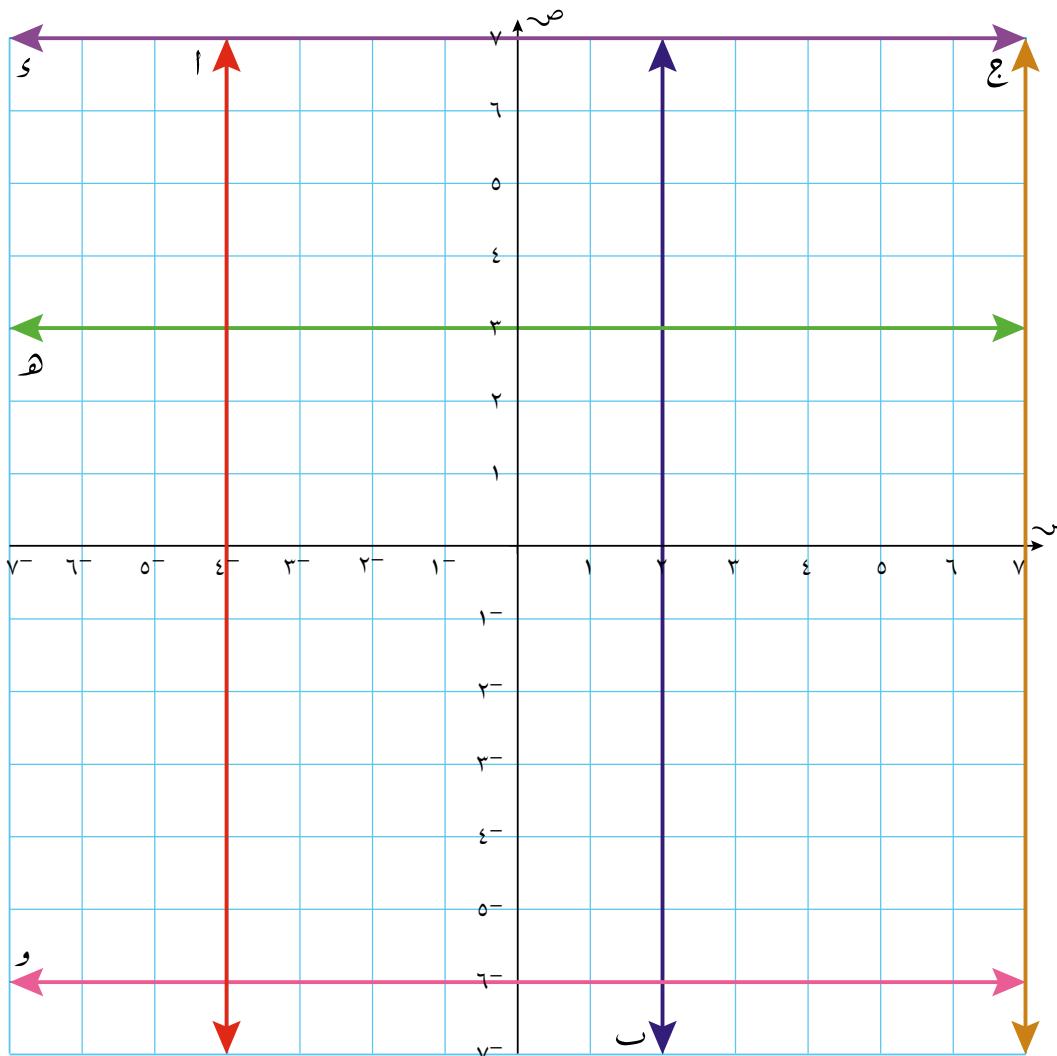
انظر إلى المُسْتَقِيمَيْنَ في المُخْطَطِ الآتِيِّ :



- الإحداثي السيني لكل نقطة تقع على المستقيم الرأسي، هو ٣. لذلك تكون مُعادلة المستقيم $س = 3$.
- الإحداثي الصادي لكل نقطة تقع على المستقيم الأفقي، هو -2 . لذلك تكون مُعادلة المستقيم $ص = -2$.
- كل مُعادلات المستقيمات الرأسيّة تأتي على صورة $س =$ عددًا.
- كل مُعادلات المستقيمات الأفقيّة تأتي على صورة $ص =$ عددًا.

تمارين ١-٧-ب

(١) اكتب مُعادلة كلّ مستقيم مرسوم على المستوى الإحداثي الآتي:



(٢) مثل كلاً مما يلي على المستوى الإحداثي نفسه، بدون استخدام جدول القيم.

أ) $ص = 3$ ب) $ص = -1$ ج) $ص = 3s$ د) $s = 4$

هـ) $ص = -3$ و) $ص = \frac{1}{3}s$ ز) $s = \frac{7}{2}$

ط) مستقيم يوازي المحور السيني، ويتقاطع مع المحور الصادي عند النقطة (٤، ٠).

ي) مستقيم يوازي المحور الصادي، ويمرّ بالنقطة (٣، ٠).

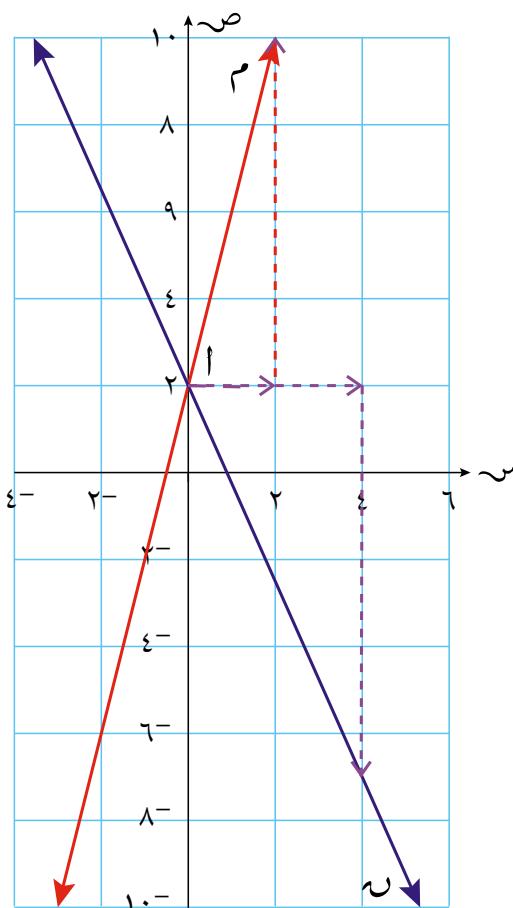
١-٧ ج ميل المستقيمات

لاحظاً

ستتعامل مع الميل في صورة مُعدل تغير عندما ندرس الرسوم البيانية لمعادلات الحركة.

مَيْلُ الْمُسْتَقِيمِ الْأَفْقِيِّ صَفْرٌ (لأنَّ الْمُسْتَقِيمَ لَا يَتَحَرَّكُ إِلَى الْأَعْلَى أَوَ إِلَى الْأَسْفَلِ، كُلَّمَا اتَّجَهَ نَحْوَ الْيَمِينِ).

لَا يَوْجُدُ مَيْلٌ لِلْمُسْتَقِيمِ الرَّأْسِيِّ (لأنَّ الْمُسْتَقِيمَ الرَّأْسِيَّ لَا يَتَحَرَّكُ إِلَى الْيَمِينِ أَوَ إِلَى الْيَسَارِ كُلَّمَا اتَّجَهَ نَحْوَ الْأَعْلَى أَوَ الْأَسْفَلِ). لَذَا فَإِنَّ مَيْلَ الْمُسْتَقِيمِ الرَّأْسِيِّ 'غَيْرُ مَعْرُوفٍ'.

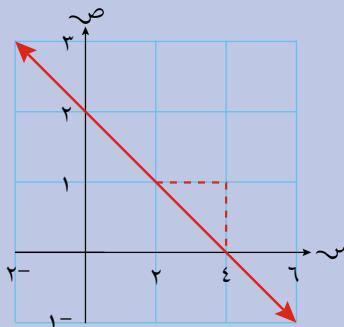


يَدُلُّ مَيْلُ الْمُسْتَقِيمِ عَلَى مَقْدَارِ انْحِدَارِهِ، وَتُقَاسِسُ دَرْجَةِ انْحِدَارِ الْمُسْتَقِيمِ بِحَسَابِ قِيمَةِ الْمَيْلِ. تَعْلَمْتُ فِي الصَّفِ الثَّامِنِ أَنَّ مَيْلَ الْمُسْتَقِيمِ الْمَارِ بِالنَّقْطَتَيْنِ (سٌ, صٌ), (سٌ٢, ص٢) يُحْسَبُ بِقِيمَةِ التَّغْيِيرِ فِي الإِحْدَاثِيِّ الصَّادِيِّ عَلَى التَّغْيِيرِ فِي الإِحْدَاثِيِّ السِّينِيِّ:

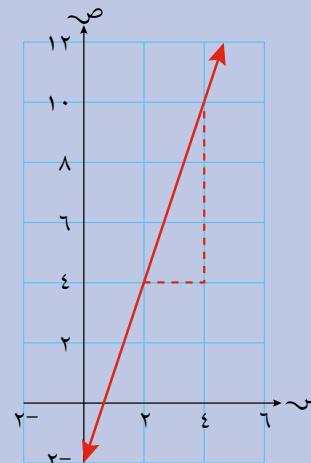
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير في الإحداثي ص}}{\text{التغيير في الإحداثي س}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

مثال ٣

أوجد ميل المستقيم في كل مما يلي، في صورة عدد كامل أو كسر في أبسط صورة.



ب



أ

الحل:

لاحظ أن المستقيم يمر بالنقطتين (٤، ٤)، (٢، ١).

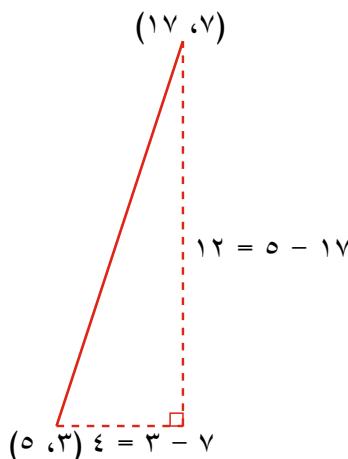
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير في الإحداثي (ص)}}{\text{التغيير في الإحداثي (س)}} = \frac{4 - 1}{2 - 4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

لاحظ أن المستقيم يمر بالنقطتين (٤، ٠)، (٢، ١).

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير في الإحداثي (ص)}}{\text{التغيير في الإحداثي (س)}} = \frac{1 - 0}{2 - 4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

مثال ٤

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٣، ٧)، (٥، ١٧).

الحل:

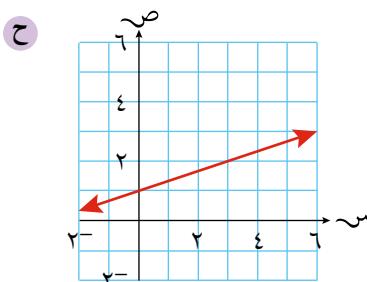
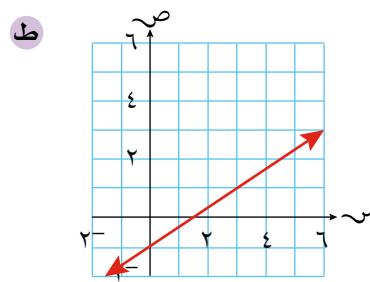
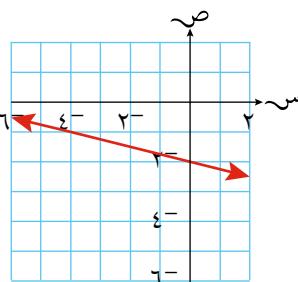
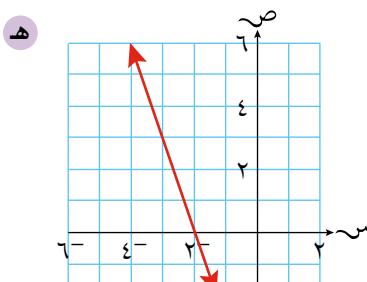
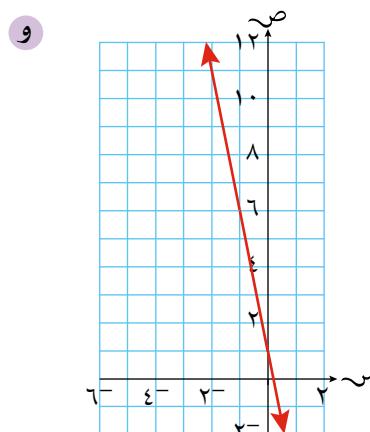
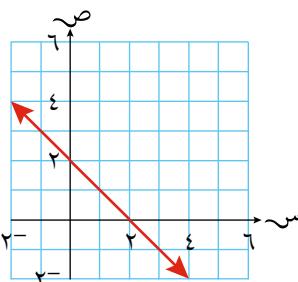
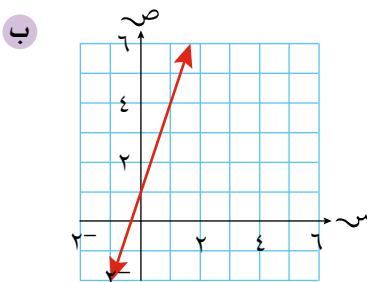
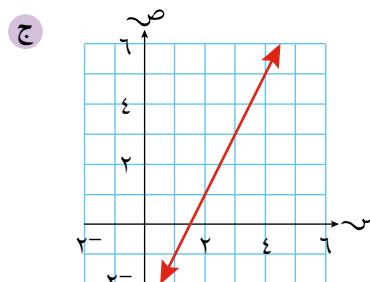
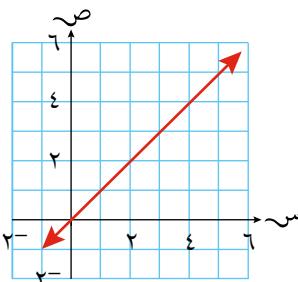
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير في الإحداثي (ص)}}{\text{التغيير في الإحداثي (س)}} = \frac{17 - 7}{5 - 3} = \frac{10}{2} = 5$$

$$17 - 7 = 10$$

$$5 - 3 = 2$$

تمارين ١-٧-ج

(١) أوجد ميل المستقيم في كل مما يلي، في صورة عدد كامل أو كسر في أبسط صورة:



(٢) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين، في كل مما يلي:

ب ل (٠، ٦)، م (٣، ٩)

د ل (٣، ٢)، م (٧، ١٠)

و ل (٥، ٣)، م (٧، ١٢)

أ ل (١، ٢)، م (٣، ٨)

ج ل (٤، ٢)، م (٤، ١)

ه ل (٢، ٣)، م (-٤، ١)

فَكَرْ جِيدًا: هل كنت تتوقع أن يكون الميل موجباً أو سالباً.



طبق مهاراتك

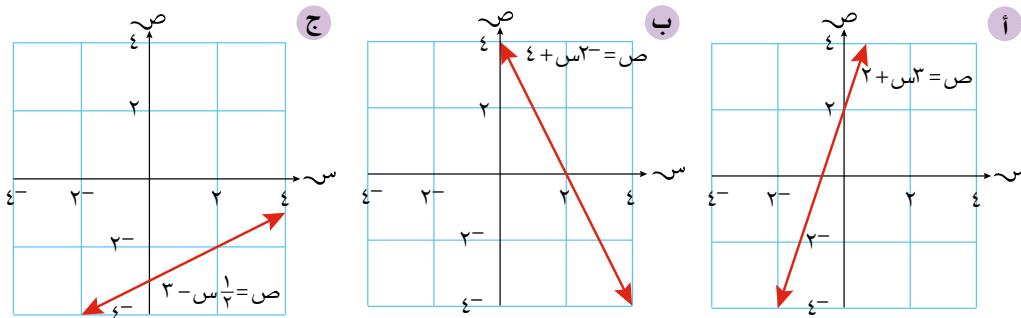
(٣) في الشكل المقابل: إذا كان التغير الرأسى في المسافة التي قطعتها السيارة ٦٠ م،

فما قيمة التغير الأفقي فيها؟

فَكَرْ جِيدًا في المسألة وفي الموضوع الرياضي الذي تحتاج إلى استخدامه لتجد الحل.

١-٧- د إيجاد مُعادلة المُستقيم

انظر إلى المُستقيمات الثلاثة الآتية:



تحقق بنفسك أن قيمة الميل للمستقيمات:

- في التمثيل البياني (أ) = $\frac{1}{2}$
 - في التمثيل البياني (ب) = $\frac{1}{2}$
 - في التمثيل البياني (ج) = $\frac{1}{2}$

لاحظ أن ميل كل مستقيم هو معامل (s) في المعادلة، وأن قيمة الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع المحور (s) (وتُعرف بالجزء المقطوع من محور الصادات) تساوي الحد الثابت في المعادلة. سبب ذلك أن المستقيم يتقاطع مع المحور الصادي عندما $s = 0$ وفي المعادلة $s = 2 - 1$ يكون الإحداثي s هو -1 عندما $s = 0$.

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

$$ج + مس = ص$$

↑ ↑

الثابت (الجزء المقطوع
من محور الصادات)

الميل

- يمكن أن تكتب مُعادلة المستقيم في صورة ص = م س + ج
 - يُدلِّك ج (الحد الثابت) على تقاطع المستقيم مع المحور الصادي (الجزء المقطوع من محور الصادات).

م (معامل س) هو ميل المستقيم؛ تعني القيمة السالبة للميل أن المستقيم يتجه إلى الأسفل كلما اتجهنا إلى اليمين. وتعني القيمة الموجبة للميل أن المستقيم يتجه إلى الأعلى كلما اتجهنا إلى اليمين. وكلما كبرت قيمة (م)، ازداد انحدار المستقيم.

- القِيمَةُ السالِبةُ لِلْمَيْلِ تَعْنِي أَنَّ
 - الْمَسْتَقِيمُ يَشْكُّلُ زَاوِيَةً مُنْفَرِجَةً
 - مَعَ الْمَحْوَرِ السَّينِيِّ.
 - القيمة الموجبة للميل تعني أن
 - المستقيم يشكل زاوية حادة مع
 - المحور السيني.

مثال ٥

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مُعادلة من المُعادلات الآتية:

أ) $s = 3s + 4$ ب) $s = 5 - 3s$ ج) $s = \frac{1}{2}s + 9$

د) $s + 8 = 3s + 2$ هـ) $s = 6 - 3s$

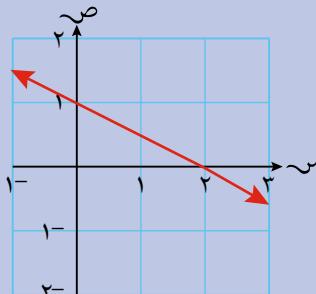
الحل:

<p>معامل (s) هو الميل الحد الثابت هو الجزء المقطوع من محور الصادات</p>	<p>أ) $s = 3s + 4$ $\text{الميل} = 3$ الجزء المقطوع من محور الصادات = 4</p>
<p>أعد كتابة المُعادلة في صورة $s = m s + b$ مُعامل (s) هو الميل، الحد الثابت (b) هو الجزء المقطوع من محور الصادات</p>	<p>ب) $s = -3s + 5$ $\text{الميل} = -3$ الجزء المقطوع من محور الصادات = 5</p>
<p>قد تكون قيمة الميل كسرًا.</p>	<p>ج) $s = \frac{1}{2}s + 9$ $\text{الميل} = \frac{1}{2}$ الجزء المقطوع من محور الصادات = 9</p>
<p>أعد كتابة المُعادلة في الصورة $s = m s + b$</p>	<p>د) $s = -s + 8$ $\text{الميل} = -1$ الجزء المقطوع من محور الصادات = 8</p>
<p>أعد كتابة المُعادلة في الصورة $s = m s + b$</p>	<p>هـ) $s = 6 - 3s$ $3s + 2s = 6$ $\frac{3}{2}s = 6$ $s = \frac{3}{2} \cdot 6$ $s = \frac{3}{2} \cdot 6$ $\text{الميل} = \frac{3}{2}$ الجزء المقطوع من محور الصادات = 3 </p>

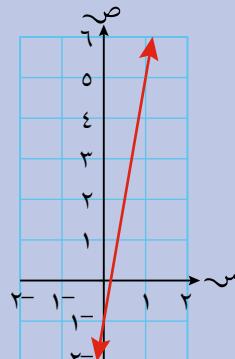
لإيجاد الميل، والجزء المقطوع من محور الصادات، من المُعادلة مباشرة، يجب أن نعيد تنظيمها لتكون في صورة:
 $s = m s + b$

مثال ٦

أوجد مُعادلة كلّ مستقيم في كلّ مما يأتي:



ب



أ

الحلّ:

$$\text{الميل} = \frac{6}{1}$$

يقطع المستقيم المحور الصادي عند
ص = 1

$$\text{الميل} = 6, \text{ الثابت} = -1$$

∴ المُعادلة هي ص = 6س - 1

$$\text{الميل} = -\frac{1}{2}$$

يقطع المستقيم المحور الصادي عند ص = 1

$$\text{الميل} = -\frac{1}{2}, \text{ الثابت} = 1$$

∴ المُعادلة هي ص = $-\frac{1}{2}s + 1$

تمارين ١-٧-د

(١) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات في كل من المعادلات الخطية الآتية، ثم مثّل المستقيمات بيانياً:

ب) ص = ٢س + ٣

أ) ص = ٤س - ٥

د) ص = س - ٣

ج) ص = ٢س - ٣

و) ص = $6 - \frac{1}{2}s$

ه) ص = $\frac{1}{3}s + ٢$

ح) س + ٢ص = ٤

ز) س + ص = ٤

ي) س = ٤ص - ٢

ط) س + $\frac{ص}{٢} = ٣$

ل) ٩س - ٣ص = ٢

ك) س = $\frac{ص}{٤} + ٢$

(٢) أعد تنظيم كلّ مُعادلة لتصبح في صورة ص = مس + ج، ثمّ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات في كل مما يأتي:

أ) ص = س - ٤ ب) س = $\frac{ص}{٢} - ٤$ ج) ص = س + ص - ١ = ٠

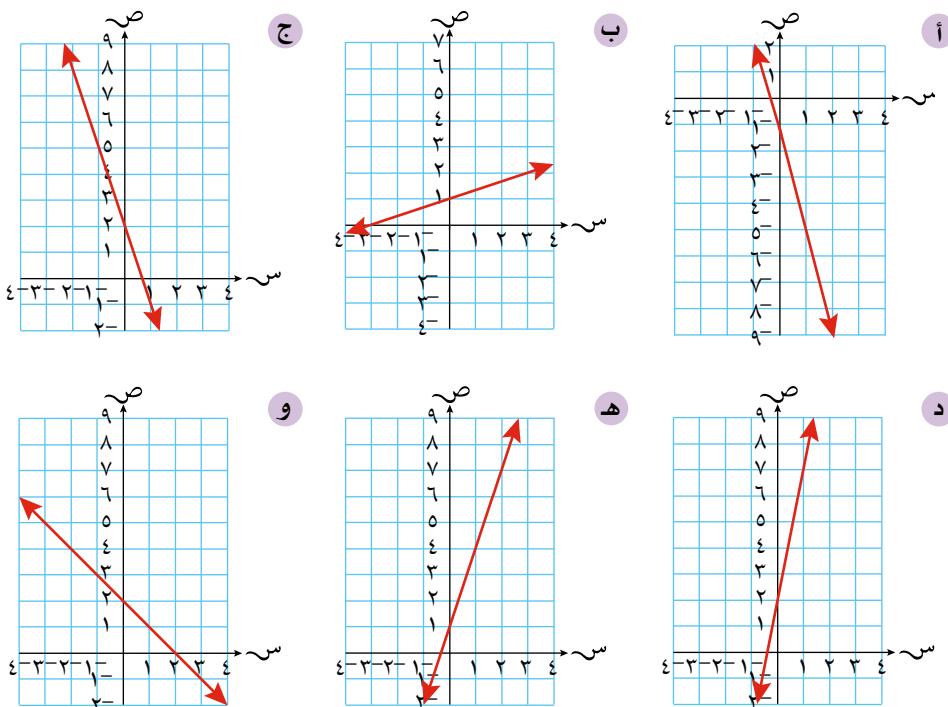
د) ٢س - ص - ٥ = ٠ ه) ٢س - ص + ٥ = ٠ و) س + ٣ص - ٦ = ٠

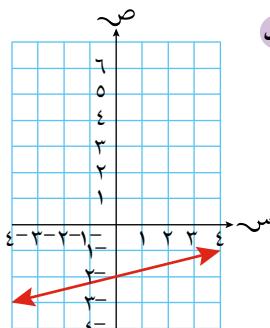
ط	$\frac{ص}{2} = س + 2$	ح	$4س + ص = 8$	ز	$4ص = 12س - 8$
ل	$\frac{ص}{3} - 4 = س - 2$	ك	$\frac{ص}{2} - 4 = س - 12$	ي	$\frac{ص}{3} = 2س - 4$

(٣) أوجد مُعادلة المستقيم (في صورة $ص = مس + ج$ ، لكل مما يأتي:

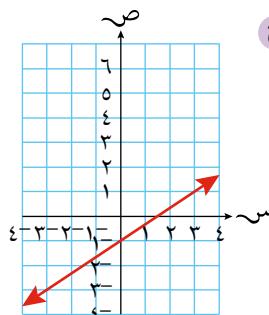
- أ الميل يساوي ٢، والجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي ٣
- ب الميل يساوي -٣، والجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي -٢
- ج الميل يساوي ٣، والجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي -١
- د الميل يساوي $-\frac{3}{2}$ ، والجزء المقطوع من المحور الصادي عند النقطة (٠، -٥)
- ه الجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي ٢، والميل يساوي $-\frac{3}{4}$
- و الجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي -٣، والميل يساوي $\frac{3}{8}$
- ز الجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي -٧٥، والميل يساوي ٠
- ح الجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي -٢، والميل يساوي ٠
- ط الميل يساوي ٠، والجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي ٤

(٤) أوجد مُعادلة كل مُستقيم في كل مما يأتي:

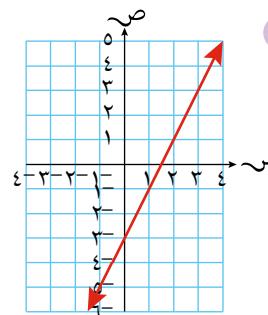




ط



ج



ز

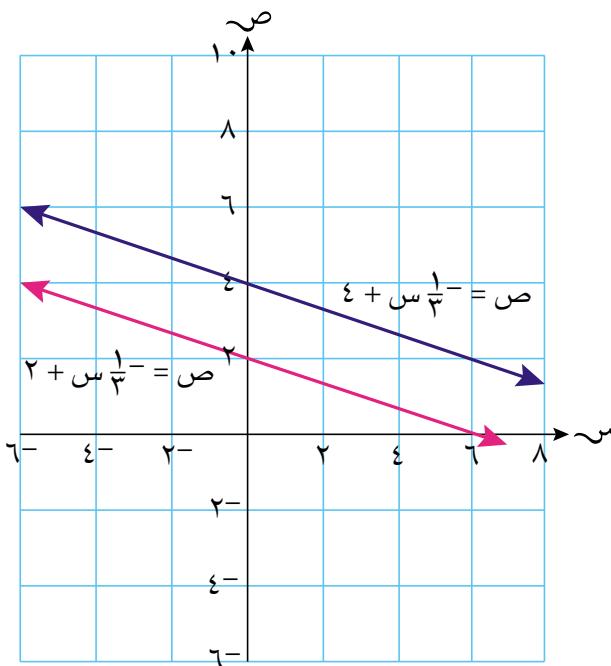
٥ أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كلٌ ممّا يلي:

- أ** ل (٣، ٢)، ع (٤، ٨)
ب ل (٤، ٥)، ع (٧، ١)
ج ل (-١، ٣)، ع (٤، ٦)
د ل (٣، -٥)، ع (١٢، ٧)

١-٥-هـ مَيْلُ الْمُسْتَقِيمَاتِ الْمُتَوَازِيَّةِ وَمَيْلُ الْمُسْتَقِيمَاتِ الْمُتَعَامِدَةِ

المسْتَقِيمَاتِ الْمُتَوَازِيَّةِ

المُسْتَقِيمَاتِ الْمُتَوَازِيَّةِ لها المَيْلُ نَفْسُهُ، وبالتالي فإن المُسْتَقِيمَاتِ التي لها المَيْلُ نَفْسُهُ تكون مُتَوَازِيَّة.

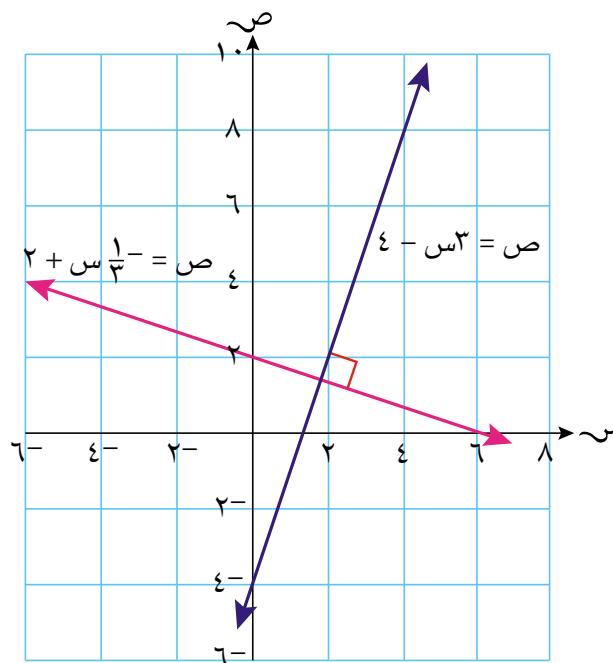


المُسْتَقِيمَاتُ الْمُتَعَامِدَةُ

يتقاطع المُسْتَقِيمَانُ الْمُتَعَامِدَانُ لِيُشَكّلا زَوْاياً قَائِمَةً. نَاتِجُ ضَرْبِ مَيْلَيْهِمَا هُوَ -1 . وَبَنَاءً عَلَى ذَلِكَ، فَإِن $m_1 \times m_2 = -1$ ، حِيثُ (m) هُوَ مَيْلُ كُلِّ مُسْتَقِيمٍ.

يُظَهِّرُ أَدْنَاهُ التَّمثِيلانُ الْبَيَانِيُّانُ لِلْمُسْتَقِيمَيْنِ الْمُتَعَامِدَيْنِ.

إِذَا كَانَ نَاتِجُ ضَرْبِ مَيْلَيِ
الْمُسْتَقِيمَيْنِ يَسْاوِي -1 ، فَإِن
الْمُسْتَقِيمَيْنِ مُتَعَامِدَانِ.



مَيْلُ الْمُسْتَقِيمِ الَّذِي مَعَادِلُتِهِ $y = -\frac{1}{3}x + 2$ هُوَ $-\frac{1}{3}$

مَيْلُ الْمُسْتَقِيمِ الَّذِي مَعَادِلُتِهِ $y = 3x - 4$ هُوَ 3

نَاتِجُ ضَرْبِ الْمَيْلَيْنِ: هُوَ $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$

عِنْدَمَا يُطْلَبُ إِلَيْكَ إِيجَادُ مَيْلِ الْمُسْتَقِيمِ الْمُتَعَامِدِ مَعَ مُسْتَقِيمٍ آخَرُ مُعَطَّى، عَلَيْكَ إِيجَادُ سَالِبٍ مَقْلُوبٍ لِلْمَيْلِ الْمُعَطَّى.

إِذَا بَدَأْتَ بِالْمُسْتَقِيمِ $y = 3x - 4$ ، الَّذِي لَهُ الْمَيْلُ 3 ، فَإِنْ مَيْلَ الْمُسْتَقِيمِ الْمُتَعَامِدِ مَعَهُ هُوَ $-\frac{1}{3}$

مثال ٧

مستقيم معادلته ص = $\frac{2}{3}s + 2$ ؛ أوجد معادلة المستقيم في كل مما يلي إذا كان:

- عمودياً على المستقيم المعطى ويمر بنقطة الأصل.
- عمودياً على المستقيم المعطى ويمر بالنقطة (-٣، ١).

الحل:

a ص = $\frac{m}{3}s + j$
 $m = -\frac{2}{3}$
 $j = 0$

معادلة المستقيم هي ص = $-\frac{2}{3}s$.

الميل يساوي سالب مقلوب $\frac{2}{3}$
 بما أن المستقيم يمر بنقطة الأصل، فهو
 إذاً يقطع المحور الصادي عند ص = ٠.

b ص = $-\frac{3}{2}s + j$
 $s = -3, \text{ ص} = 1$
 $-\frac{3}{2}(-3) + j = 1$
 $\frac{9}{2} + j = 1$
 $j = 1 - \frac{9}{2}$
 $j = -\frac{7}{2}$
 ص = $-\frac{3}{2}s - \frac{7}{2}$

استخدم $m = -\frac{3}{2}$ من الجزئية (أ) أعلاه.

عرض قيمتي s ، ص من النقطة المعلقة لتحل المعادلة من أجل إيجاد قيمة j .

تمارين ١-٧ - هـ

(١) اكتب معادلة المستقيم الموازي لكل مستقيم من المستقيمات الآتية:

- | | | |
|---|--|---|
| ج ص = $\frac{s}{2} + 4$
و ص = $-s - 6$ | ب ص = $2s - 3$
هـ ص = $s - 2$ | أ ص = $-3s$
د ص = $-s - 2$ |
|---|--|---|

(٢) أي من المستقيمات الآتية موازٍ للمستقيم ص = $\frac{1}{2}s$ ؟

- | | |
|---|--|
| ج ص + ١ = $\frac{1}{2}s$
هـ ص = $2s - 4$ | ب ص = $2s + 1$
د ص = $2s - 4$ |
|---|--|

(٣) ارسم المستقيمات التي معادلاتها ص = $2s$ ، ص = $2s + 1$ ، ص = $2s - 3$ ،
 ص = $2s + 2$ ، على المستوى الإحداثي نفسه. ماذا تلاحظ على المستقيمات التي
 رسمتها؟

(٤) أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته $ص = ٢س + ٤$ ، في كل من الحالات التالية:

- أ يكون الجزء المقطوع من محور الصادات -٢ .
- ب يمرّ بنقطة الأصل.
- ج يمرّ بالنقطة $(٤, -٠)$.
- د الثابت يساوي $\frac{١}{٢}$.

(٥) مستقيم معادلته: $ص = ٣س - ٩$

- أ اكتب معادلة لمستقيم آخر موازٍ للمستقيم المعطى.
- ب اكتب معادلة لمستقيم آخر يقطع المحور الصادي في نفس النقطة التي يقطع فيها المستقيم المعطى المحور الصادي.
- ج اكتب معادلة لمستقيم يقطع المحور الصادي في نفس النقطة التي يقطع فيها المستقيم المعطى المحور الصادي، ويكون موازياً للمحور السيني.

(٦) ما معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $ص = \frac{٣}{٥}s + ٣$ ويمرّ بالنقطة $(١, ٢)$ ؟

(٧) أثبت أن المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $(٦, ٠)$ ، $ل(١٢, ٠)$ يكون:

- أ عمودياً على المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $ح(٨, ١٠)$ ، $ه(٤, ٨)$.
- ب عمودياً على المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $ب(-٤, -٨)$ ، $د(-١, -\frac{١٣}{٣})$.

(٨) أوجد معادلة المستقيم $أ ب$ الذي يقطع المحور الصادي عند $ص = ٥$ ، والعمودي على المستقيم $ج د$ الذي يمر بالنقطتين $ج(٠, ٣)$ ، $د(١, ٠)$.

(٩) أوجد معادلة كلّ مستقيم في كل مما يلي، بحيث يكون:

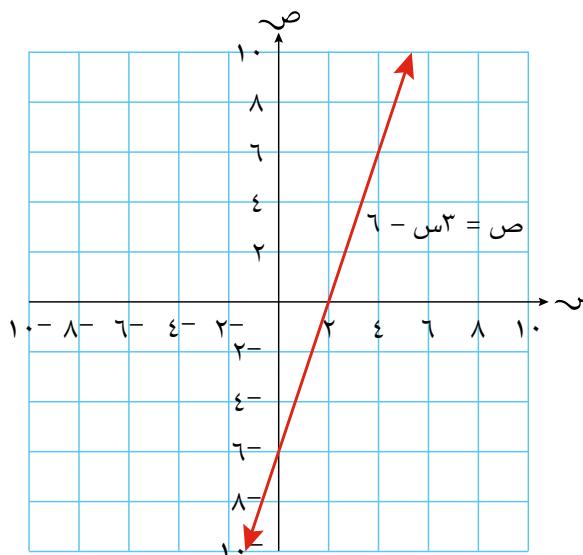
- أ عمودياً على المستقيم الذي معادلته $ص = ١ - ٢س$ ، ويمرّ بالنقطة $(٢, -\frac{١}{٢})$.
- ب عمودياً على المستقيم الذي معادلته $ص = ٥ + ٢س$ ، ويمرّ بالنقطة $(١, -٢)$.

(١٠) يصل المستقيم $أ$ بين النقطتين $(٦, ١)$ ، $(١, ١٣)$ ، ويصل المستقيم $ب$ بين النقطتين $(٩, ٥)$ ، $(١١, ٩)$. أوجد قيمة ميل كلّ منها، وحدد إن كان المستقيم $أ$ متعامداً مع المستقيم $ب$ أم لا.

(١١) أثبت أن النقاط $أ(-٣, ٦)$ ، $ب(-٤, ١٢)$ ، $ج(-٤, ٨)$ ، $د(-٥, ٥)$ لا يمكن أن تكون رؤوساً للمستطيل $أ ب ج د$.

١-٧ و التقاطع مع المحور السيني

تعلّمت في الدروس السابقة طريقة إيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات وذلك إما من خلال التمثيل البياني أو من خلال المعادلة. وهنا سنتعرّف إلى **الجزء المقطوع من محور السينات**. يُبيّن التمثيل البياني الآتي المستقيم الذي معادلته $s = 3s - 6$.



لاحظ أن المستقيم يقطع المحور السيني عند النقطة $(2, 0)$ حيث $s = 0$ ، $s = 2$ ؛ يكون الإحداثي الصادي لجميع النقاط الواقعة على المحور السيني صفرًا. عوض $s = 0$ في معادلة المستقيم لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات:

| سابقًا

$$s = 3s - 6$$

$$0 = 3s - 6$$

$$6 = 3s$$

$$2 = s$$

سبق لك أن نفذت خطوات مماثلة للخطوات الواردة هنا عندما قمت بحل معادلات آنئَة.

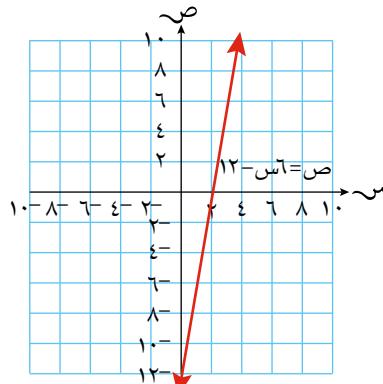
ويمكنك أيضًا أن توجد الجزء المقطوع من محور الصادات بوضع $s = 0$ ؛ تُبيّن الأمثلة الآتية العمليات الحسابية لإيجاد كل من الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات.

مثال ٨

أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكل من المستقيمات الآتية، ثم مثّلها بيانياً:

$$\text{أ } ص = ٦س - ١٢ \quad \text{ب } ص = -س + ٣ \quad \text{ج } ٢س + ص = ٢٠$$

الحل:



$$\text{أ } ص = ٦س - ١٢$$

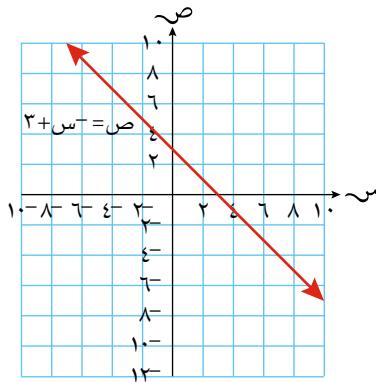
لإيجاد الجزء المقطوع من محور
الصادات:

$$س = ٠ \Leftrightarrow ص = ١٢$$

لإيجاد الجزء المقطوع من محور
السينات:

$$ص = ٠ \Leftrightarrow ٦س - ١٢ = ٠$$

$$٢ = س \Leftrightarrow$$



$$\text{ب } ص = -س + ٣$$

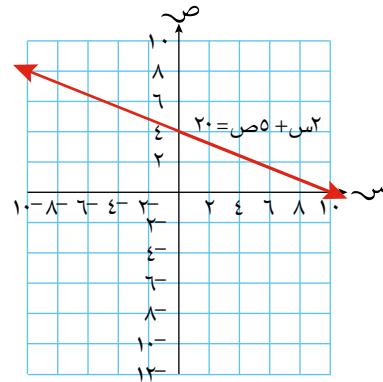
لإيجاد الجزء المقطوع من محور
الصادات:

$$س = ٠ \Leftrightarrow ص = ٣$$

لإيجاد الجزء المقطوع من محور
السينات:

$$ص = ٠ \Leftrightarrow -س + ٣ = ٠$$

$$٣ = س \Leftrightarrow$$



$$\text{ج } ٢س + ٥ص = ٢٠$$

لإيجاد الجزء المقطوع من محور
الصادات:

$$س = ٠ \Leftrightarrow ص = ٥$$

$$٤ \Leftrightarrow ص =$$

لإيجاد الجزء المقطوع من محور
السينات:

$$ص = ٠ \Leftrightarrow ٢س = ٢٠$$

$$١٠ = س \Leftrightarrow$$

تمارين ١-٧ و

(١) أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكل من المستقيمات الآتية، ثم مثلها بيانيًّا.

ج

و

ط

ك

ب

هـ

حـ

لـ

أ

دـ

زـ

يـ

$$\text{ج ص} = -3s + 6 \quad \text{ب ص} = \frac{s}{3} - 10 \quad \text{أ ص} = -5s + 1$$

$$\text{و ص} = -s + 1 \quad \text{هـ ص} = 3s + 1 \quad \text{دـ ص} = 4s + 2$$

$$\text{ط ص} = \frac{2s}{3} - 1 \quad \text{حـ ص} = 2s - 3 \quad \text{زـ ص} = 2s - 3$$

$$\text{كـ ص} = \frac{2s}{5} + 1 \quad \text{لـ ص} = \frac{s}{4} - 2 \quad \text{يـ ص} = \frac{2s}{5} - 4$$

(٢) أوجد في كل حالة من الحالات الآتية قيمة ج، عندما تكون النقطة المُعطاة واقعة على المستقيم:

(٢، ١)

(٥، ١)

(٦، ٣)

دـ

وـ

حـ

(٤، ٤)

(٣، ٣)

(٣، ٢)

جـ

هـ

زـ

$$\text{دـ ص} = \frac{3}{4}s + \text{جـ} \quad \text{جـ ص} = -2s + \text{جـ}$$

$$\text{وـ ص} = \text{جـ} - \frac{1}{5}s \quad \text{هـ ص} = \frac{1}{3}s + \text{جـ}$$

$$\text{حـ ص} = \frac{2}{3}s + \text{جـ} = \text{صـ} \quad \text{زـ ص} = \text{جـ} + 4s$$

٢-٧ القطعة المستقيمة

٢-٧-أ إيجاد طول القطعة المستقيمة

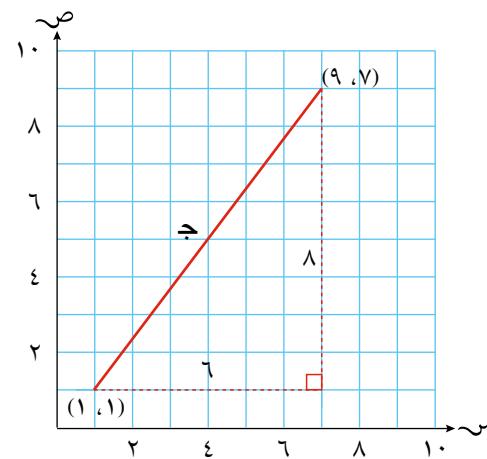
رُغم أن طول المستقيم لا نهائي، فإننا نعتمد عادة جزء من المستقيم. وأيّ جزء من المستقيم يصل بين نقطتين يُسمى **قطعة مستقيمة**.

إذا علمت إحداثيات طرفي قطعة مستقيمة، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورث لاحتساب طولها.

مثال ٩

أوجد المسافة بين النقطتين $(1, 1)$ ، $(9, 7)$.

الحل:



للحما

ستتم تغطية نظرية فيثاغورث بالتفصيل في الصف العاشر. ولكن تذكر الأمر الآتي في المثلث القائم الزاوي: مربع طول الوتر يساوي مجموع مربع طول الضلعين الآخرين. نكتب ذلك في صورة

$$أ^2 + ب^2 = ج^2$$

(نظرية فيثاغورث)
عُوض عن قيمة $أ^2$ ، $ب^2$
تلخص من التربيع بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

$$\begin{aligned} ج^2 &= 6^2 + 8^2 \\ ج^2 &= 36 + 64 \\ ج^2 &= 100 \\ \therefore ج &= \sqrt{100} \\ ج &= 10 \text{ وحدات} \end{aligned}$$

يمكن إيجاد المسافة بين نقطتين دون استخدام التمثيل البياني.

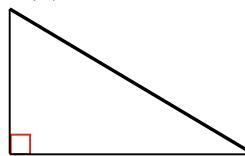
مثال ١٠

أوجد طول القطعة المستقيمة أب، إذا علمت أن أ(٣، ٦)، ب(٧، ٣).

الحل:

يمكن لرسم مثلث (دون استخدام المستوى الإحداثي أو رسم دقيق) أن يساعد:

أ(٦، ٣)



$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = \text{ج}^2 \quad (\text{نظرية فيثاغورث})$$

عُوض.

الفرق بين الإحداثيين السينيين للنقطتين أ(٣، ٦)، ب(٧، ٣) يساوي ٤ والفرق بين الإحداثيين الصاديين للنقطتين أ(٣، ٦)، ب(٧، ٣) يساوي ٢

استخدم هذين الفرقين في نظرية فيثاغورث:

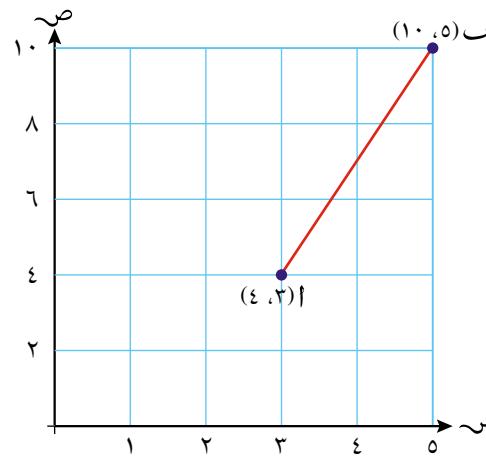
$$\begin{aligned} \text{أب}^2 &= \text{ج}^2 - \text{أج}^2 \\ \text{أب}^2 &= ٩ + ١٦ \\ \text{أب}^2 &= ٢٥ \end{aligned}$$

$$\therefore \text{أب} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ وحدات.}$$

٢-٧ إيجاد إحداثيات نقطة مُنتصف القطعة المستقيمة

يمكن إيجاد إحداثيات **نقطة المنتصف** للقطعة المستقيمة (النقطة التي تقع في منتصف المسافة تماماً بين طرفيها).

اعتبر القطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها النقطتين أ(٣، ٤)، ب(٥، ١٠).

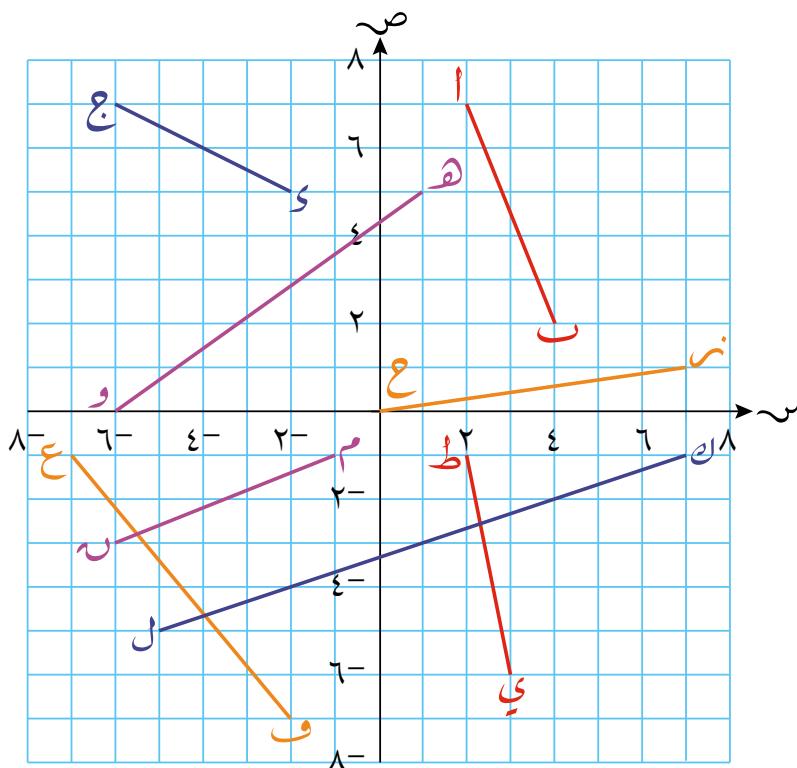


إذا جمعت الإحداثيَّين الصاديَّين، ثم قسمت المجموع على ٢، ستحصل على $\frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$
هذا يُعطِي نقطة جديدة إحداثيَّها (٤، ٧)، تقع في مُنْتَصَف المسافة بين النقطتين أ، ب تماماً، وتُسَمَّى نقطة المُنْتَصَف.

إحداثيات نقطة المُنْتَصَف للقطعة المستقيمة أب، حيث أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) هي
 $(\frac{s_1+s_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2})$

تمارين ٢-٧

- (١) استخدم التمثيل البياني التالي لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة، وإحداثيات نقطة مُنْتَصَفها:



- (٢) أوجد إحداثيات نقطة مُنْتَصَف القطعة المستقيمة التي تصل بين كُل زوج من النقاط التالية، وأوجد طول كل قطعة:

سابقاً

تحقق من أنك تذكر كيف تتعامل مع جمع الأعداد السالبة.

- | | | | | | |
|---|-----------------|---|-----------------|---|-----------------|
| أ | (٦، ٣)، (١٢، ٩) | ب | (٦، ٢)، (١٠، ٤) | ج | (٨، ٣)، (٧، ٤) |
| د | (١١، ٤)، (٣، ١) | ه | (٧، ٤)، (٣، ١) | و | (٤، ١١)، (٤، ٥) |
| ز | (٥، ٣)، (٢، ١) | ح | (٤، ١)، (-٤، ٣) | ط | (-٤، ٣)، (٢، ١) |

٣) أوجد المسافة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-5, -3)$.

٤) أي النقطتين $A(5, 6)$ أم $B(5, 3)$ أقرب إلى النقطة $J(-2, 3)$ ؟

٥) أي النقطتين $A(4, 2)$ أم $B(-3, -4)$ أبعد عن نقطة الأصل؟

٦) تشكل النقاط $A(0, 0)$, $B(4, -5)$, $J(-3, -3)$ رؤوس المثلث ABJ . أوجد طول كل ضلع في المثلث.

٧) النقطة $(5, 7)$ هي مُنتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين $(10, s)$, $(4, 3)$. ما قيمة s ؟

٨) إحداثيات نقطة مُنتصف القطعة المستقيمة DH هي $(-4, 3)$. فإذا كانت إحداثيات النقطة $D(-2, 8)$, فأوجد إحداثيات النقطة H .

مُلْخَص

يجب أن تكون قادرًا على:

- رسم المستقيم إذا علمت معادلته، من خلال تكوين جدول قيم وتعيين النقاط على المستوى الإحداثي.
- إيجاد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات بمعولمية معادلة المستقيم.
- إيجاد ميل المستقيم من التمثيل البياني للمستقيم.
- إيجاد معادلة المستقيم بمعرفة ميله والجزء المقطوع من محور الصادات.
- إيجاد معادلة المستقيم الرأسي والمستقيم الأفقي.
- إيجاد ميل المستقيم بمعرفة إحداثيات نقطتين عليه.
- إيجاد طول قطعة مستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها.
- إيجاد معادلة المستقيم الموازي لمستقيم معين، والمارة بنقطة معينة.
- إيجاد معادلة المستقيم المتعامد مع مستقيم معين، والمارة بنقطة معينة.

ما يجب أن تعرفه:

- تبيّن مُعادلة المستقيم العلاقة بين الإحداثيين السيني والصادي لجميع النقاط الواقعة على المستقيم.
- ميل المستقيم يقيس مدى انحداره.
- الجزء المقطوع من محور الصادات، والجزء المقطوع من محور السينات، هما تقاطعاً المستقيم مع المحورين الصادي والسيني، على التوالي.
- قيمة (م) في المعادلة $s = m s + j$ هي قيمة ميل المستقيم.
- قيمة (ج) في المعادلة $s = m s + j$ هي قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات.
- يمكن أن تجد قيمة الجزء المقطوع من محور السينات بالتعويض عن $s = 0$ ، وقيمتى m ، j في المعادلة $s = m s + j$ ، وإيجاد قيمة s .
- يمكن أن تجد قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات بالتعويض عن $s = 0$ ، وقيمة j في المعادلة $s = m s + j$ ، وإيجاد قيمة s .
- المستقيمان اللذان لهما الميل نفسه متوازيان.
- ناتج ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين يساوي 1.
- إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(\frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{m_1 + m_2}{2})$.
- يمكن حساب طول القطعة المستقيمة باستخدام نظرية فيثاغورث.

تمارين نهاية الوحدة

١) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين $(1, 4)$ ، $(5, 1)$.

٢) أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة A ب، حيث $A(-7, -1)$ ، $B(5, 9)$.

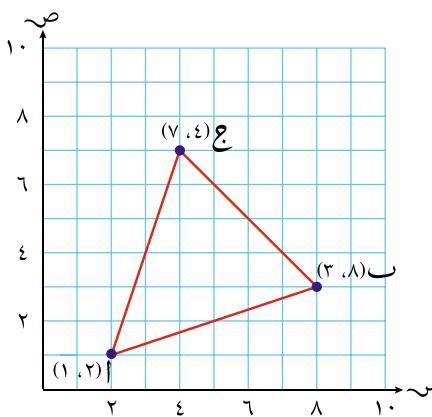
٣) أوجد طول القطعة المستقيمة ج د، حيث ج $(1, -2)$ ، د $(6, 16)$.

٤) باستخدام المثلث A ج في التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد إحداثيات نقطة منتصف كل ضلع من أضلاع المثلث A ج.

ب أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث A ج.

ج ما نوع المثلث A ج؟



٥) ارسم مستوى إحداثيات، حيث تقع س بين -5 و 5

أ ارسم المستقيم الذي معادلته $s = 2s - 4$ على المستوى الإحداثي.

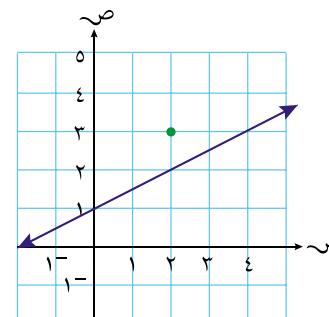
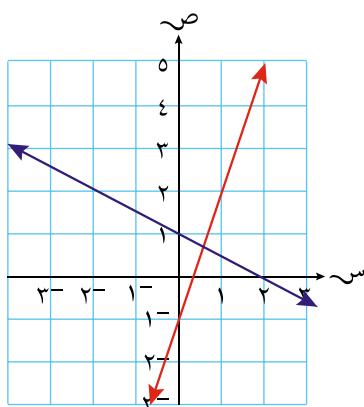
ب ارسم المستقيم الذي معادلته $s = 5 - s$ على نفس المستوى الإحداثي.

ج ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين؟

٦) أوجد معادلتي المستقيمين المعروضين في التمثيل البياني المقابل.

٧) في التمثيل البياني التالي، مستقيم معادلته $s = \frac{1}{2}s + 1$

ونقطة إحداثياتها $(2, 3)$.



أ أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم المعطى والذي يمر بالنقطة المعطاة.

ب أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المعطى والذي يمر بالنقطة المعطاة.

٨) أوجد إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته $s = -2s + 9$ مع المحورين السيني والصادي.

الوحدة الثامنة: التماثل والتحوييلات الهندسية



المفردات

Symmetry	• التماثل
	• التماثل حول محور
Line of symmetry	• التماثل الدوراني
	• التماثل الدوراني
Rotational symmetry	• رتبة التماثل الدوراني
Symmetrical	• متماثل
	• مرکز الدوران
Order of rotational symmetry	• مركز الدوران
Centre of rotation	• التماثل حول مستوى
Plane symmetry	• محور التماثل
	• محور التماثل
Axis of symmetry	• التحويل الهندسي
Transformation	
Reflection	• الانعكاس
Rotation	• الدوران
Translation	• الانسحاب
Enlargement	• التكبير
Image	• الصورة
Vector	• المتجه

بوابة وأقواس مدخل جامع السلطان قابوس الأكبر (طَيْبُ اللَّهِ ثَرَاه) في مسقط.

تتصف البوابة والأقواس المُبيّنة في الصورة أعلاه بأنّها مُتماثلة. ويُشكّل نصف البوابة والأقواس صورة مرآة للنصف الآخر. ويُسمى الخط المستقيم الذي يقسم البناء إلى نصفين خط تماثل أو محور التماثل.

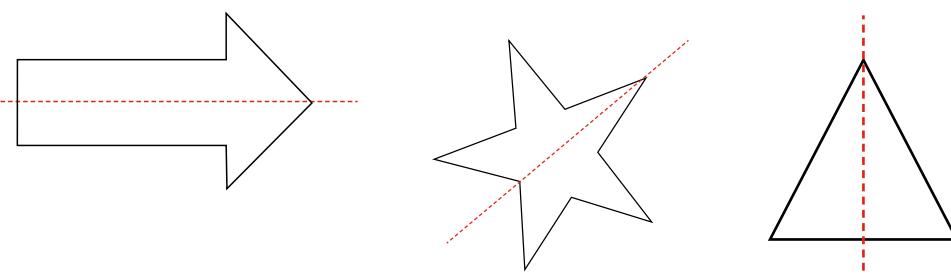
تُسمى الأشكال التي يمكن تقسيمها إلى قسمين مُتطابقين (أو أقسام مُتطابقة) في الشكل والقياس، أشكالاً متماثلة. ونجد التماثل في الأشكال المستوية (الثنائية الأبعاد) والمُجسمات (ثلاثية الأبعاد). سنتعلّم في هذه الوحدة أكثر عن التماثل حول محور، والتماثل الدوراني، في الأشكال ثنائية الأبعاد والأشكال ثلاثية الأبعاد.

فائدة

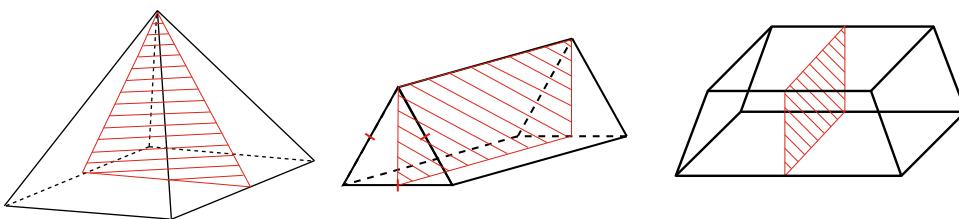


التماثل

تكون الأشكال **الثنائية الأبعاد متماثلة**، إذا أمكن تقسيمها بخطٍ مُستقيم إلى نصفين مُتطابقين.



تكون الأشكال **الثلاثية الأبعاد متماثلة**، إذا أمكن تقسيمها بسطحٍ مُستوٍ إلى قسمين مُتطابقين.



سوف تتعلم في هذه الوحدة

كيف:

- تُحدد محور التماثل لأشكال هندسية ثنائية الأبعاد.
- تجد رتبة التماثل الدوراني للأشكال هندسية ثنائية الأبعاد.
- تميز التماثل للمثلثات والأشكال الرباعية والدوائر.
- تُميز خصائص التماثل للمنشور والهرم.
- تُتفّذ انعكاساً ودوراناً وانسحاباً وتتكبيراً لأشكال مُستوية.
- تميز التحويلات الهندسية وتصفها.
- تستخدم المتجهات لوصف الانسحابات.
- تميز تركيب التحويلات الهندسية وتستخدمها.
- تصف التحويلات الهندسية بدقة باستخدام الإحداثيات.

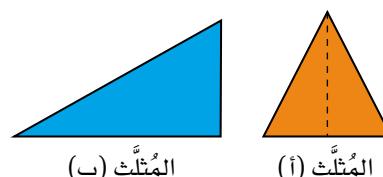
١-٨ التماثل في الأشكال ثنائية الأبعاد

يوجد نوعان من **التماثل** في الأشكال ثنائية الأبعاد (المُستوية).

- التماثل حول محور
- التماثل الدوراني

١-٨ التماثل حول محور

إذا أمكن طيّ شكل ما ليتطابق أحد النصفين تماماً مع النصف الآخر، يكون الشكل متماثلاً حول محور.



المثلث (أ) متماثل حول الخط المستقيم المنقط (خط التماثل)، الذي يقسم **المثلث (أ) إلى قسمين مُتطابقين**.

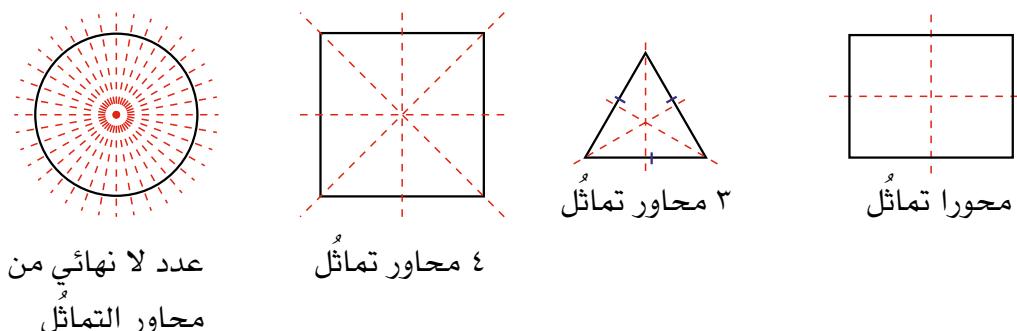
رابط

التماثل مهم جداً لفهم تركيب البُلورات في الكيمياء.

المُثُلُّ (ب) غير مُتماثل، والسبب أنك لا تستطيع رسم خط مستقيم، يقسم المُثُلُّ إلى نصفين مُتطابقين.

إذا وضعت مراة على الخط المستقيم الذي يقسّم المثلث (أ)، سيظهر المثلث في المرأة كاملاً. يُسمى الخط المستقيم بمحور التمايز.

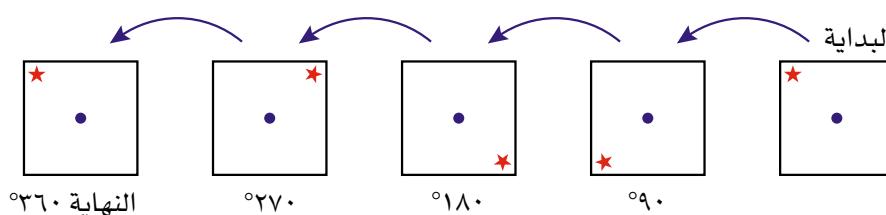
ويمكن أن تتضمن الأشكال التالية أكثر من محور تمايز:



١-٨- ب التمايز الدواراني

إذا نفّذت دوراناً لشكل ما بزاوية قياسها ${}^{\circ}360$ ، مع المحافظة على نقطة مركزه في موقع ثابت، وتطابق مع نفسه تماماً في عدة مواقع خلال الدوران، فإنَّ للشكل تماثلاً دورانياً.
يُسمى عدد مرات تطابق الشكل مع نفسه خلال دورة كاملة **رتبة التمايز الدواراني**.

يعرض المخطط أدناه كيف ينطبق المربع مع نفسه أربع مرات خلال دورة قياسها ${}^{\circ}360$.
تسمى النقطة عند مركز المربع **مركز الدوران**. وهي النقطة التي يدور حولها المربع. تُبيّن النجمة موقع إحدى زوايا المربع عندما يدور حول مركز الدوران.



يتطابق المربع مع نفسه تماماً أربع مرات في الدورة الكاملة: عندما يدور ${}^{\circ}90$ ، ${}^{\circ}180$ ، ${}^{\circ}270$ ، ${}^{\circ}360$. فتكون رتبة التمايز الدواراني لديه ٤؛ تذكر أن على الشكل أن يدور ${}^{\circ}360$ ليعود إلى موقعه الأصلي.

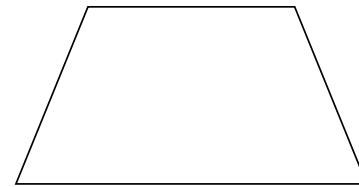
إذا دَوَّرت الشكل ${}^{\circ}360$ حتى يعود لينطبق على نفسه لأول مرة، تكون رتبة التمايز الدواراني في هذه الحالة ١

مثال ١

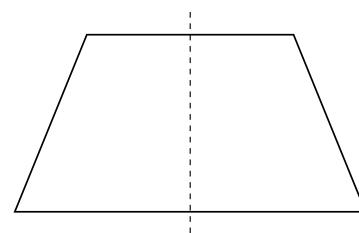
أُوجد عدد محاور التماثل، ورتبة التماثل الدوراني، في شبه المنحرف المُنطابق الضلعين المُقابلين.

الحل:

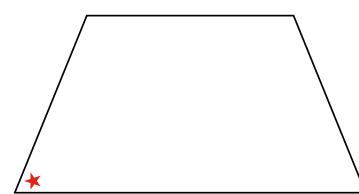
ابداً برسم تقريري للشكل.



يمكن طي الشكل ليتطابق أحد النصفين تماماً مع النصف الآخر حول الخط المنقط.
إذن، يوجد للشكل محور تماثل واحد.



رسم نجمة في إحدى زوايا الشكل.
لا ينطبق الشكل مع نفسه خلال دورة كاملة
إلا مرة واحدة.



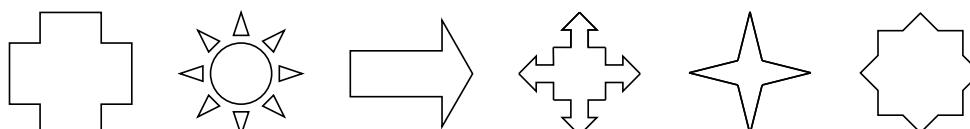
يوجد في شبه المنحرف المُنطابق الضلعين محور تماثل واحد، ورتبة التماثل الدوراني في شبه المنحرف المُنطابق الضلعين تساوي ١

تمارين ١-٨

(١) ارسم المُضلّعات التالية، واستكشف عدد محاور التماثل، ورتبة التماثل الدوراني لكل شكل:

رتبة التماثل الدوراني	عدد محاور التماثل	الشكل
		المُربّع
		المُستطيل
		المُثُلث المُتطابق الأضلاع
		المُثُلث المُتطابق الضلعين
		المُثُلث المُختلف الأضلاع
		الطائرة الورقية (الدالتون)
		مُتوازي الأضلاع
		المعيّن
		الخماسي المنتظم
		السداسي المنتظم
		الثمانبي المنتظم

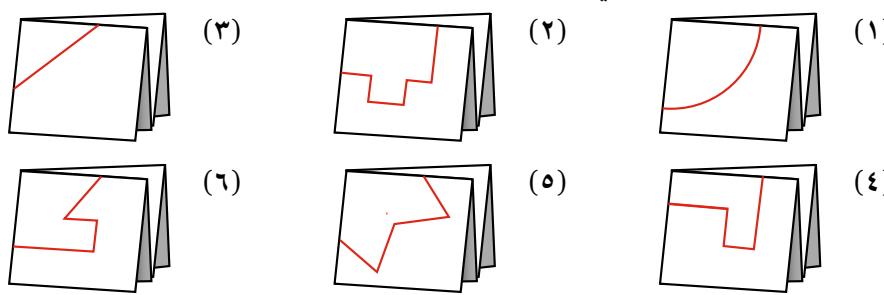
(٢) انسخ الأشكال التالية، وارسم جميع محاور التماثل الممكنة في كل شكل:



طبق مهاراتك

(٣) صنع أطفال مدرسة مجموعة من الأشكال، وذلك بقص تصميم رسم عند زاوية

مطوية ورقية موضحة في الأشكال التالية:



فكّر جيداً في كيفية طي الورقة.
يبين المخطط أن الورقة قد طويت
إلى أربعة أقسام.

أ) ارسم الشكل الذي سيتّبع في كل حالة.

ب) بيّن محاور التماثل لكل شكل باستخدام خطوط مستقيمة مُنقطة.

(٤) ارسم شعارات ثلاثة سيارات مختلفة، ثم حدد محاور التماثل على كل شعار، واكتّب رتبة التماثل الدوراني لكل منها.

٢-٨ التماهُل في الأشكال ثلاثيَّة الأبعاد

يوجد نوعان من التماهُل في الأشكال ثلاثيَّة الأبعاد.

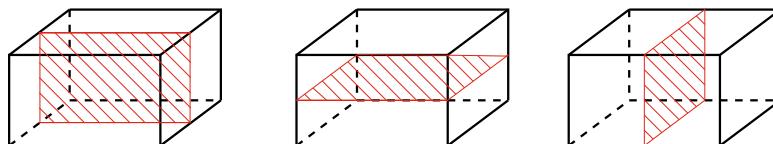
- التماهُل حول مستوى
- التماهُل الدوراني

٢-٨-١ التماهُل حول مستوى

المُستوى هو سطح مُبسط ثُلثي الأبعاد، يمتد في جميع الاتجاهات. إذا استطعت تقسيم المُجسَّم إلى نصفين، بحيث يكون كُلّ منهما صورة مرآة لِلآخر، يكون للمُجسَّم مُستوى تماهُل.

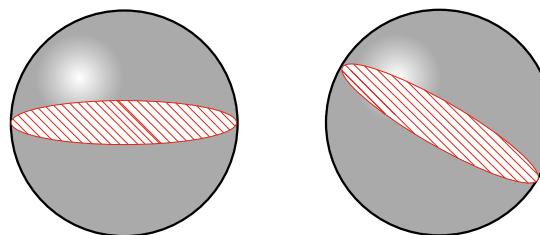
مستوى التماهُل في الشكل ثلاثي الأبعاد يُشبه محور التماهُل في الشكل الثنائي الأبعاد.

فيما يلي متوازي مستطيلات تم تقسيمه بثلاث طرق مُختلفة لتشكيل نصفين مُتطابقين، وكل منهما صورة مرآة لِلآخر. تمثل المنطقة المظللة في كُلّ مجسَّم مستوى التماهُل (حيث يبيّن أين يمكن أن تقسمه).



يوجد ثلاثة مستويات تماهُل في متوازي المستطيلات.

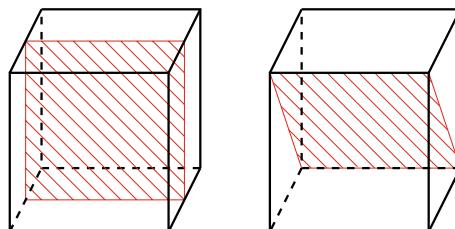
كما يوضح الشكل التالي كيف يمكن رسم مستوى التماهُل في الكرة، لتقسيمها إلى نصفٍ كُرة مُتطابقين.



يوجد في الكرة عدد لا يُنهي من مستويات التماهُل، وتماثل الكرة حول أي مستوى يمرّ بمركزها.

تمارين ٢-٨-أ

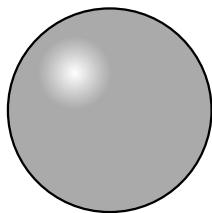
(١) المُخْطَطَان التاليان يوضّحان مُستويًا تماثل في مُكعب ما:



إذا علمت أن للمُكعب تسعة مستويات تماثل، ارسم باقي المُخْطَطَات لتبيّن مُستويات التماثل السبعة الأخرى.

(٢) اكتب عدد مستويات التماثل في كُلّ من المُجَسّمات التالية:

ج كرّة

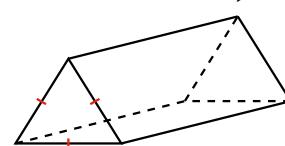


ب أسطوانة

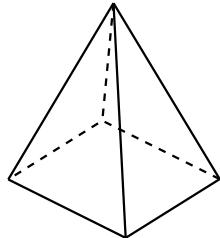


أ منشور قاعدته مُثلث

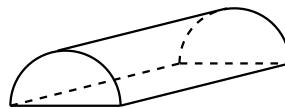
مُتطابق الأضلاع



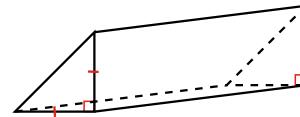
و هرم منتظم مُستطيل
القاعدة



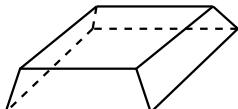
ه نصف أسطوانة



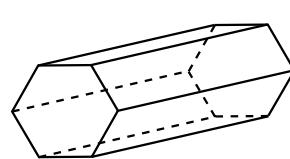
د منشور قاعدته مُثلث
مُتطابق الضلعين وقائم
الزاوية



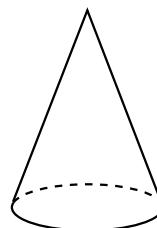
ط منشور قاعدته شبه
منحرف متطابق
الضلعين



ح منشور قاعدته شكل
سُداسي منتظم



ز مخروط

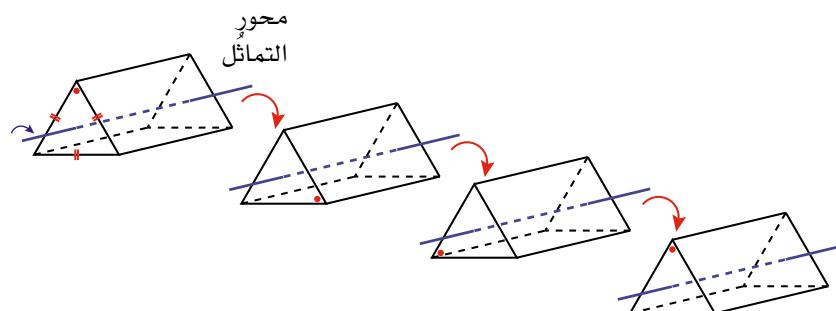


(٣) في الجُزئيَّة د من التمارين ٢، وُضِّحَ كيف تختلف الإجابة لو كان المقطع العرضي للمنشور مُثلثاً مُختلفاً الأضلاع.

٢-٨ ب التماثُل الدوراني

تخيل وجود عصا في مجسم. تشكل العصا محوراً للمجسم ليدور حوله. إذا أدرت المجسم حول المحور وظهر هو نفسه عند نقاط مختلفة خلال دورانه، يكون للمجسم تماثل دوراني. وتمثل العصا محور التماثل.

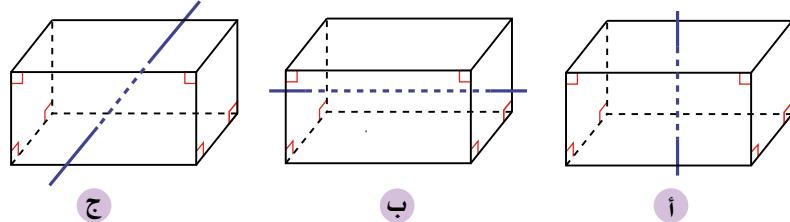
للمنشور الثلاثي رتبة تماثل دوراني قدرها ٣ حول محور التماثل الموضّح.



يكون المنشور الثلاثي مطابقاً لوضعه الأصلي عند ثلاثة مواقع خلاص الدوران: عندما يدور حول محور التماثل بزاوية مقدارها 120° , 240° , 360° . تُبيّن النقطة الحمراء موقع أحد رؤوس المنشور خلال الدوران.

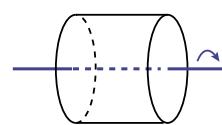
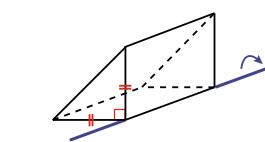
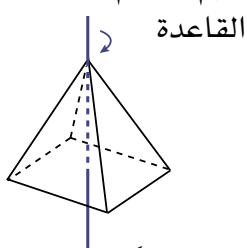
تمارين ٢-٨ ب

- (١) فيما يلي ثلاثة محاور تماثل ممكنة لمتوازي المستويات. حدد رتبة التماثل الدوراني لكل منها بالدوران في اتجاه عقارب الساعة بزاوية قياسها 360° .

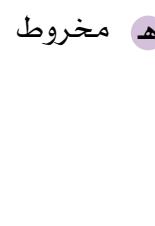
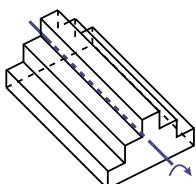


- (٢) حدد رتبة التماثل الدوراني لكل مجسم عند دورانه حول المحور الموضّح في كل مما يلي:

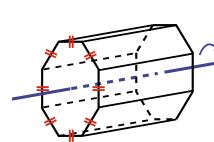
- أسطوانة ج هرم منتظم قاعدته مثلث مُتطابق الضلعين وقائم الزاوية



- جسم مركب من ثلاثة مُتوازيات مستطيلات



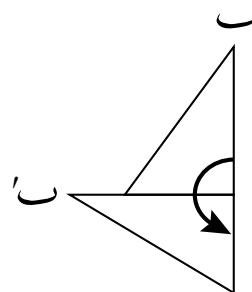
- مخروط منشور قاعدته شكل ثماني منتظم



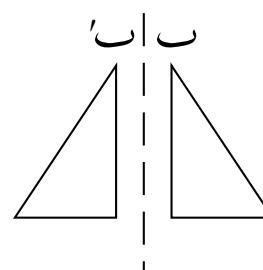
٣-٨ التحويلات الهندسية

التحويل الهندسي يعني التغيير في موقع أو أبعاد الشكل (أو النقطة). وهناك أربعة أنواع من التحويلات الهندسية هي:

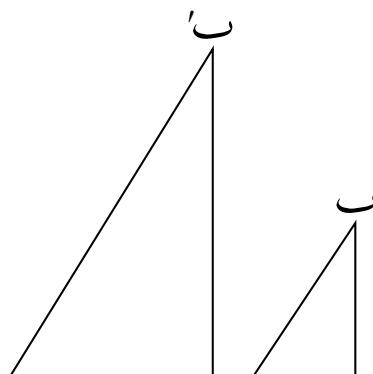
- الانعكاس
- الدوران
- الانسحاب
- التكبير



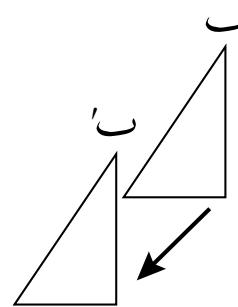
دوران



انعكاس



تكبير



انسحاب

تُنتج عن التحويل الهندسي **صورة** للشكل الأصلي في موقع جديد، أو بقياسات مختلفة. تُسمى النقطة **ب** على الشكل الأصلي، وتُسمى النقطة **ب'** على صورته.

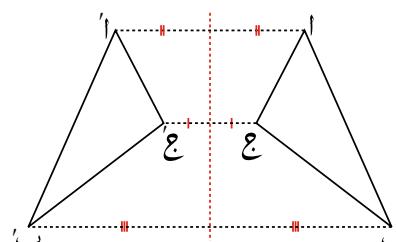
يُغيّر الانعكاس والانسحاب والدوران من موقع الشكل الأصلي، ولكنها لا تُغيّر في أبعاده. لذا، ستكون صورة الشكل **مُطابقة** لشكله الأصلي.

ولكن التكبير يُغيّر من أبعاد الشكل الأصلي، أي أن أطوال الأضلاع **المُتناظرة** في الصورة تتناسب مع أطوالها في الشكل الأصلي، وفي هذه الحالة ينتج من التكبير تشابه الشكل الأصلي مع صورته.

٣-٨ أ. الانعكاس

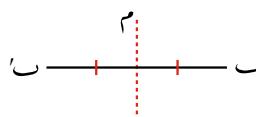
الانعكاس هو صورة مرآة للشكل، بحيث تبعد النقاط الواقعة على الشكل الأصلي وصورها المسافة نفسها عن محور الانعكاس، وتُقاس هذه المسافة دائمًا بشكل عمودي مع محور الانعكاس. (معنى آخر، يكون محور الانعكاس عموداً منصفاً للمسافة بين النقطة وصورتها).

ستلاحظ ذلك في الشكلين التاليين:

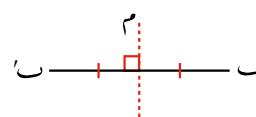


لاحظ أن محور الانعكاس يرسم مقطعاً.

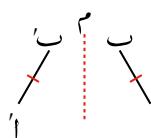
خصائص الانعكاس



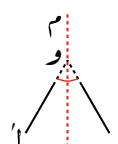
- تبعد النقطة وصورتها المسافة نفسها عن محور الانعكاس M .



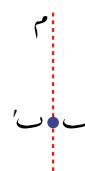
- ينصف محور الانعكاس القطعة المستقيمة الواسلة بين النقطة وصورتها، ويكون عمودياً عليها.



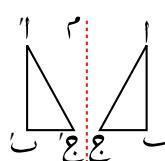
- طول القطعة المستقيمة وطول صورتها متساويان، أي $AB = A'B'$.



- يكون ميل القطعة المستقيمة عن محور الانعكاس مساوياً لميل صورتها. $Q(A \hat{w} B) = Q(A' \hat{w} B')$



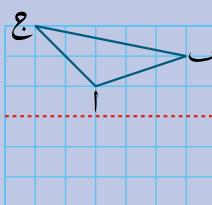
- النقاط الواقعة على محور الانعكاس وصورها هي نفسها، أي إن تلك النقاط ثابتة.



- الشكل الأصلي يتطابق مع صورته.

تحتاج إلى التعامل مع الانعكاس في محاور أفقية ومحاور رأسية ومحاور مائلة.

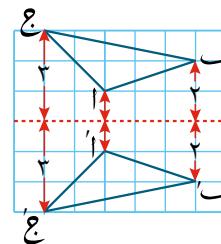
ثابت تعني أن موقع وبُعد النقطة أو الخط المستقيم لا يتغيران.

مثال ٢

أُوجِد صورة المثلث ABC بالانعكاس حول محور الانعكاس المُنَفَّق.

الحل:

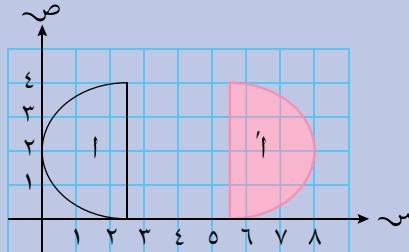
في المُخْطَط، تبعد النقطة A وحدة واحدة عن محور الانعكاس، فيكون بُعد صورتها A' أيضًا وحدة واحدة عن محور الانعكاس. تبعد النقطة B وحدتين عن محور الانعكاس، فيكون بُعد صورتها B' أيضًا وحدتين عن محور الانعكاس. ويصح ذلك في النقطة C في النقطة C' وصوريتها C'' .



صورة الخط المستقيم في الانعكاس هي خط مستقيم. هذا يعني أنك لتجد صورة المثلث ABC بالانعكاس، عليك أن تصل بين A و A' ؛ وبين B و B' ؛ وبين C و C' .

مثال ٣

يعرض الرسم المُفَابِل شكلًا وصوريته بالانعكاس على المستوى الإحداثي:



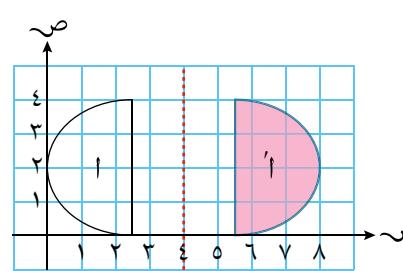
a ارسم محور الانعكاس.

b ما مُعادلة محور الانعكاس؟

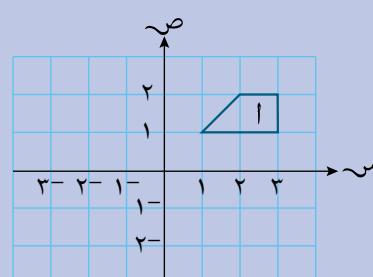
الحل:

يجب أن يبعد محور الانعكاس المسافة نفسها عن نقاط الشكل ((A) والنقاط المُناظرة لها في الشكل (A')).

محور الانعكاس موازٍ للمحور الصادي. قيمة الإحداثي السيني لأي نقطة عليه تساوي ٤، لذلك تكون مُعادلة الخط المستقيم (محور الانعكاس) $S = 4$



محور الانعكاس هو العمود المُنصف للقطعة المستقيمة الواقعة بين النقطة وصوريتها.

مثال ٤

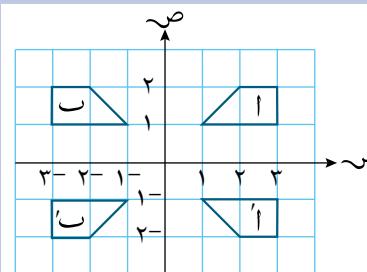
الشكل (ا) في المستوى الإحداثي هو الشكل الأصلي:

- رسم صورة الشكل (ا) بالانعكاس حول المحور الصادي. سُمّي الصورة (ب).
- رسم صورة الشكل (ا) والشكل (ب) بالانعكاس حول المحور السيني. سُمّي الصورتين (ا')، (ب') بالترتيب.

الحل:

المحور الصادي ($s = 0$) هو محور الانعكاس.

أ

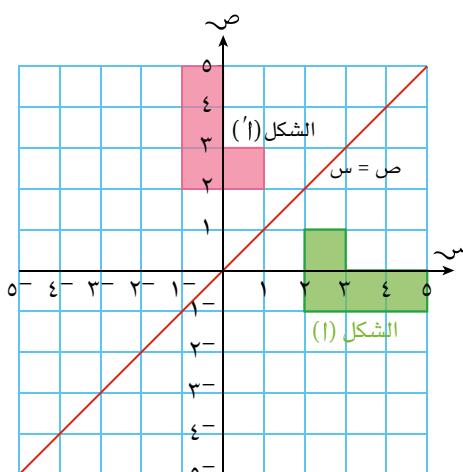


المحور السيني ($s = 0$) هو محور الانعكاس.

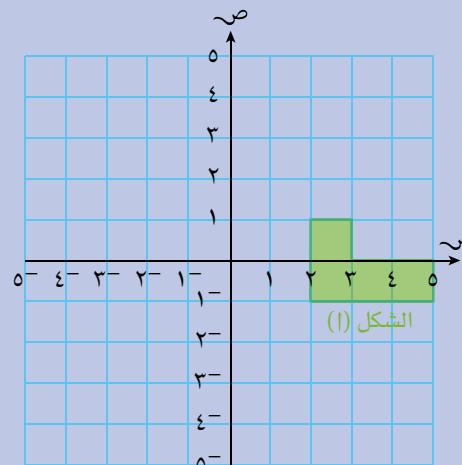
ب

مثال ٥**الحل:**

رسم الخط المستقيم $s = s$
طبق القوانين التي تعرفها عن الانعكاس
لرسم الصورة (ا').

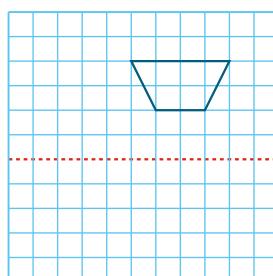


أوجد صورة الشكل (ا) بالانعكاس
حول الخط المستقيم $s = s$

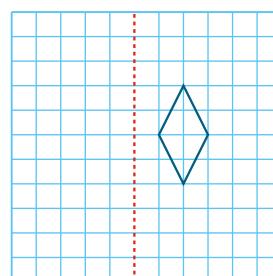


تمارين ٣-٨

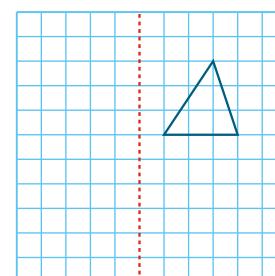
(١) انسخ الأشكال التالية على ورقة مربعات. ثم ارسم صورة كل شكل بالانعكاس حول المحور المرسوم:



ج

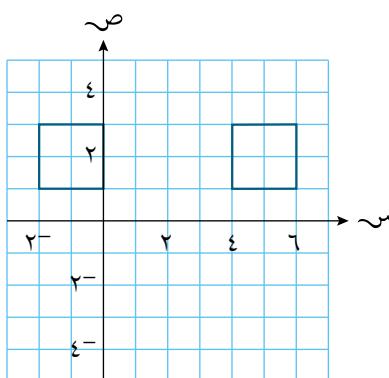


ب

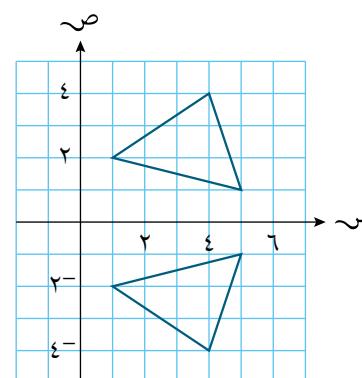


أ

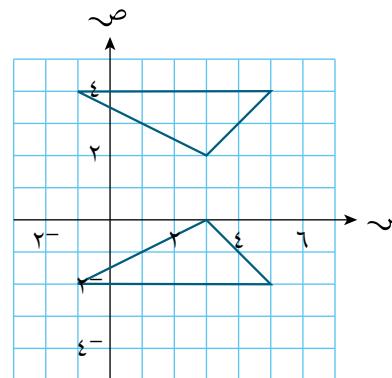
(٢) ارسم محور الانعكاس في كل شكل فيما يلي ثم اكتب معادلته:



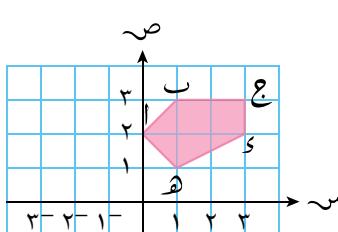
ب



أ



ج



(٣) انسخ الشكل المُقابل على ورقة مربعات:

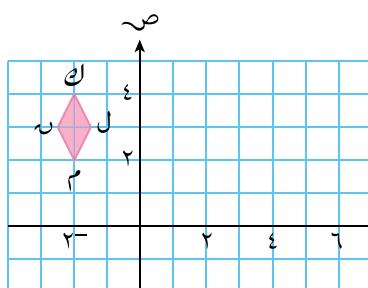
أ) أوجد صورة المضلع $A'B'C'D'$ بالانعكاس حول المحور الصادي.

ب) اكتب إحداثيات النقطة C' ، صورة النقطة C بعد الانعكاس.

ج) أي النقاط على الشكل $A'B'C'D'$

ثابتة؟ لماذا؟

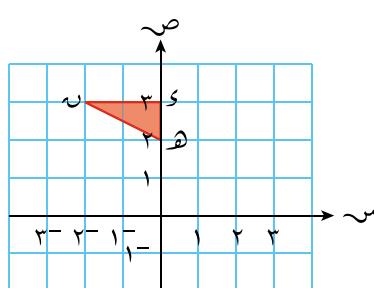
٤) انسخ الشكل المُقابل على ورقة مُربعات ثم:



- أ) أوجد صورة الشكل بالانعكاس حول الخط المستقيم $s = 1$; سُمّي الصورة $K'LM'N'$.

- ب) أوجد صورة الشكل $K'LM'N'$ بالانعكاس حول الخط المستقيم $s = 2$; سُمّي الصورة $K''LM''N''$.

٥) انسخ الشكل المُقابل على ورقة مُربعات ثم:

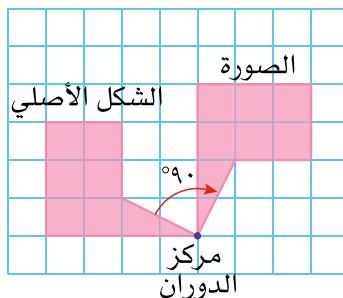


- أ) ارسم صورة المثلث N بعد انعكاسه حول المحور الصادي وسُمّي $N'G'$.

- ب) حدد إحداثيّي النقطة N قبل الانعكاس وبعده.

- ج) ارسم صورة المثلث N بالانعكاس حول الخط المستقيم $s = 1$; سُمّي الصورة $N''G''H''$.

٣-٨-ب الدوران



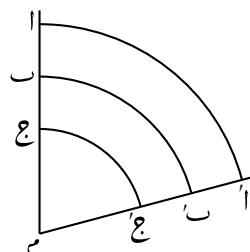
الدوران هو تحويل هندسي يحدث عندما يدور الشكل الأصلي حول نقطة ثابتة. يمكن أن يكون الدوران مع اتجاه عقارب الساعة، أو عكس اتجاه عقارب الساعة. تُسمى النقطة الثابتة مركز الدوران والزاوية التي يدورها الشكل زاوية الدوران.

تم في الشكل المُقابل دوران الشكل الأصلي بزاوية قياسها 90° مع اتجاه عقارب الساعة، حول مركز الدوران (أحد رؤوس الشكل).

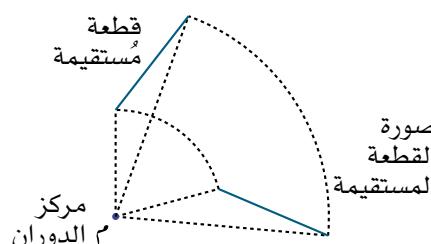
خصائص الدوران

- يُسمى الدوران بزاوية قياسها 180° نصف دورة، وبزاوية قياسها 90° ربع دورة.
- يكون موجباً عندما يكون اتجاهه عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون سالباً عندما يكون اتجاهه مع اتجاه عقارب الساعة.

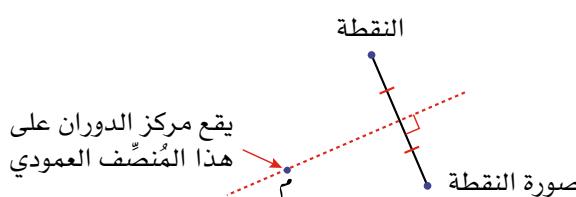
- تبعد النقطة وصورتها مسافة ثابتة عن مركز الدوران.
- تتحرّك كلّ نقطة من نقاط الشكل الأصلي على قوس دائرة مركزها هو مركز الدوران، وجميع الدوائر متّحدة في المركز.



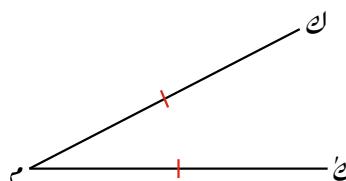
- يبقى مركز الدوران وحده ثابتاً لا يتغيّر.
- في الدوران يتطابق الشكل مع صورته:



- يمرّ العمود المنصف للقطعة المستقيمة الواسلة بين نقطة وصورتها في مركز الدوران:



- في الدوران، يكون للقطعة المستقيمة وصورتها الطول نفسه.



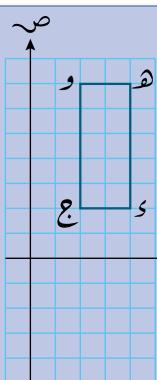
ملخص

لكي تصف دوراناً، عليك أن تُحدد:

- مركز الدوران.
- قياس زاوية الدوران (${}^{\circ}90$ أو ${}^{\circ}180$ أو ${}^{\circ}270$).
- اتجاه الدوران (مع اتجاه عقارب الساعة، أو عكس اتجاه عقارب الساعة).

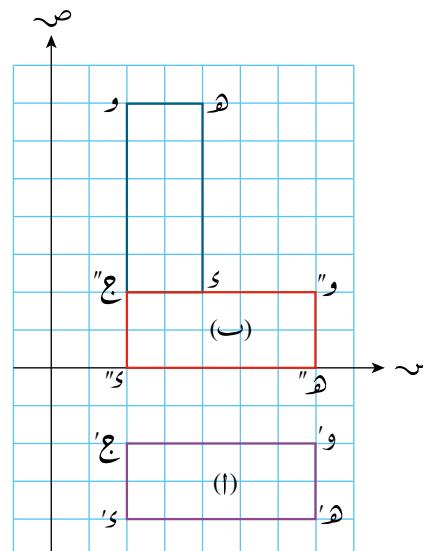
مساعدة!

يكون مركز الدوران عادة هو نقطة الأصل (${}^{\circ}0$)، أو أحد رؤوس الشكل، أو نقطة مُنتصف ضلع في الشكل الأصلي. ويكون قياس زاوية الدوران من مضاعفات الـ ${}^{\circ}90$.

مثال ٦

نَفَّذْ دُورانًا لِلشَّكَلِ المُقَابِلِ بِزاوِيَةِ قِيَاسِهَا 90° مَعَ اتِّجَاهِ عَقَارِبِ السَّاعَةِ حَوْلَ:

- نَقْطَةُ الْأَصْلِ (سَمَّ الصُّورَةَ جُ 'هُ وُ)
- النَّقْطَةُ جُ (سَمَّ الصُّورَةَ جُ "هُ وُ")

الحلّ:**مثال ٧**

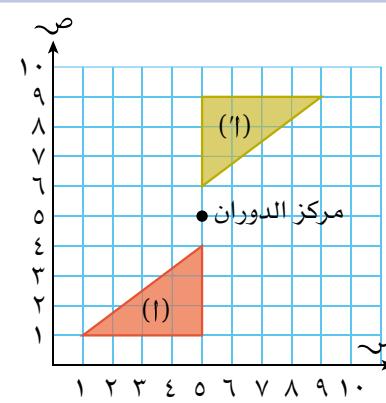
اَرْسِمِ الْمُثَلِّثَ (١) الَّذِي إِحْدَاثِيَاتِ رَؤُوسِهِ (١، ١)، (٥، ١)، (٥، ٥). ثُمَّ اَرْسِمِ صُورَتِهِ بَعْدِ دُورانِهِ حَوْلَ النَّقْطَةِ (٥، ٥) بِزاوِيَةِ قِيَاسِهَا 180° .

الحلّ:

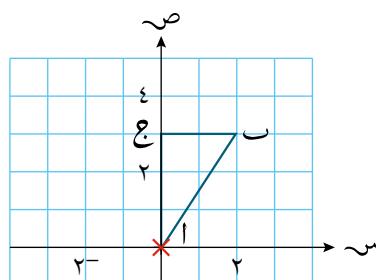
حَدَّدِ النَّقَاطَ عَلَىِ الْمُسْتَوِيِ الإِحْدَاثِيِ، ثُمَّ صَلَّ بَيْنَهَا لِتَرْسِيمِ الْمُثَلِّثِ (١).

عَيْنِ مَرْكَزِ الدُّورَانِ.

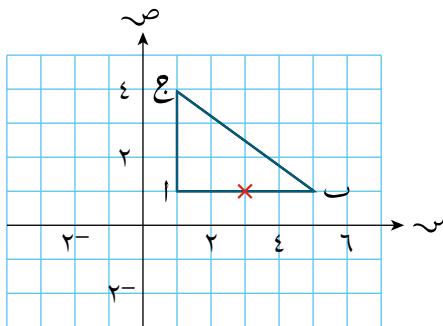
اَرْسِمِ صُورَةِ الشَّكَلِ وَسَمِّهَا (١').



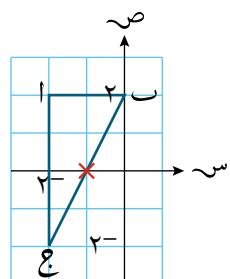
تمارين ٣-٨-ب



- (١) ارسم صورة المُثلث $A'B'C'$ باستخدام دوران سالب
مركزه $(0, 0)$ وقياس زاويته ${}^{\circ}90$.



- (٢) ارسم صورة المُثلث $A'B'C'$ باستخدام دوران
مركزه $(3, 1)$ ، وقياس زاويته ${}^{\circ}180$.

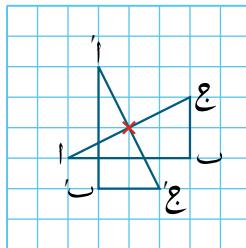


(٣) في الشكل المجاور:

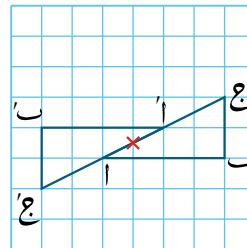
- ارسم صورة المُثلث باستخدام دوران زاويته ${}^{\circ}180$ ، ومركزه $(-1, 0)$.

عندما تكون زاوية الدوران ${}^{\circ}180$ درجة، فإن الدوران مع اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة، يعطي النتيجة ذاتها. لذا لا يتم ذكر الاتجاه في هذه الحالة.

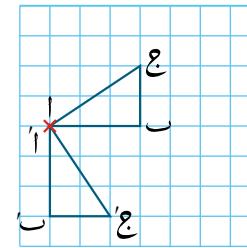
- (٤) في كلّ شكل فيما يلي، صِف الدوران الذي يُحوّل المُثلث $A'B'C'$ ، وصفاً دقيقاً، بتحديد اتجاه الدوران وزاويته، علمًا بأن مركز الدوران هو الإشارة \times



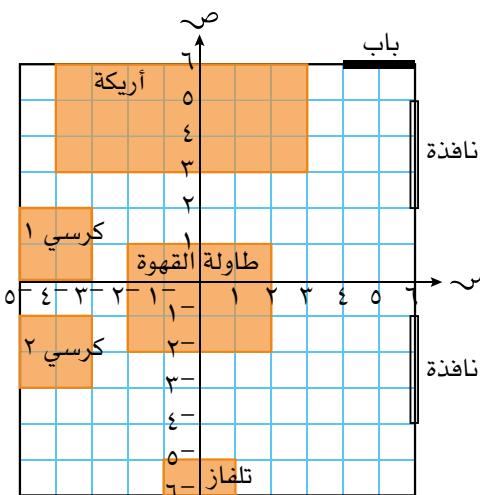
ج



ب



أ



طبق مهاراتك

٥) يُريد نايف إعادة ترتيب قطع أثاث غرفة المعيشة، المُوضّحة في المُخطط المقابل.

هل يمكنه تدوير جميع قطع الأثاث حول النقطة (٠، ٠) بالوصف المعطى أدناه، وتبقي مُتناسبة مع الغرفة؟ وضح خطوات عملك باستخدام الرسم.

أ) ٩٠° مع اتجاه عقارب الساعة.

ب) ٩٠° عكس اتجاه عقارب الساعة.

ج) ١٨٠° مع اتجاه عقارب الساعة.

٣-٨ ج الانسحاب

الانسحاب هو حركة الشكل الأصلي مسافة محددة، وباتجاه محدد، على طول خط مستقيم. ويُشار إلى الحركة بإشارات موجبة أو سالبة بحسب اتجاه الحركة، تماشياً مع محوري المستوى الإحداثي. مثلاً، تكون الحركة إلى اليسار أو إلى الأسفل سالبة، وتكون الحركة إلى اليمين أو إلى الأعلى موجبة.

ويتم وصف الانسحاب باستخدام **مُتجه** (س). وهذا يعني حركة مقدارها س وحدة باتجاه المحور السيني (يميناً أو يساراً)، وحركة مقدارها ص وحدة باتجاه المحور الصادي (أعلى أو أسفل).

فالانسحاب (٣-٢) يعني أن الشكل الأصلي قد تحرّك وحدتين إلى اليمين، وثلاث وحدات إلى الأسفل.

في المخطط الآتي، أجري انسحاب للمُثلث (م) إلى خمسة مواقع. ويمكننا وصف كل موقع

منها كالتالي:

أ) (٧)

ب) (٤)

ج) (٧٠)

د) (-٨٠)

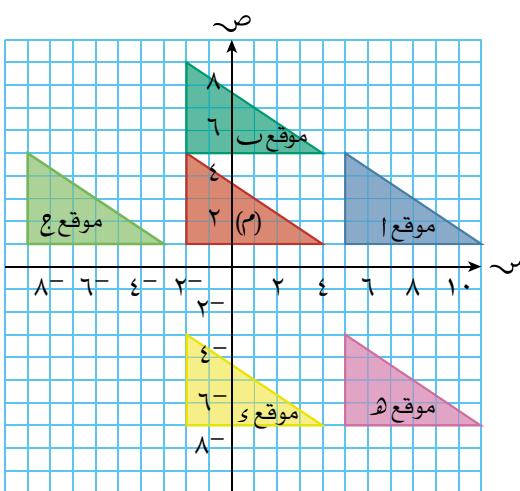
هـ) (٧٨)

لاحقاً

ستتعامل مع المتجهات بنقصيل أكثر لاحقاً.

كن حذراً عند كتابة المتجه الرأسى، لأنّه لا يتضمن شرطة قسمة. لذلك يجب ألا تشبه كتابته كتابة الكسر.

لذا اكتب $(\frac{3}{8})$ وليس $(\frac{8}{3})$.



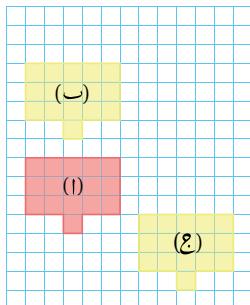
خصائص الانسحاب

- يتحرّك الشكل الأصلي المسافة نفسها، وفي الاتّجاه نفسه.
- تتحرّك كلّ نقطة في الشكل الأصلي المسافة نفسها، وفي الاتّجاه نفسه.
- لتحديد الانسحاب، يجب معرفة مسافة الانسحاب واتجاهه معًا، في صورة مُتجهة (ص).
- يمكن تسمية انسحاب الشكل الأصلي، من خلال تحديد الانسحاب الذي تمّ تفدينه على أي نقطة من نقاطه.
- لا يحتوي الشكل الأصلي على أي جزء ثابت.
- يتطابق الشكل الأصلي مع صورته.

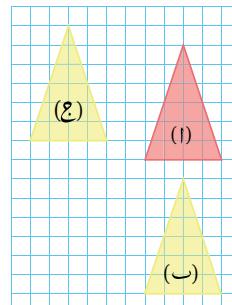
تمارين ٣-٨-ج

(١) ارسم على ورقة مربعات أشكالًا توضّح فيها ما يلي:
 أ انسحاب مُربَع ٦ وحدات إلى اليسار. ب انسحاب مُثلث ٥ وحدات إلى اليمين.

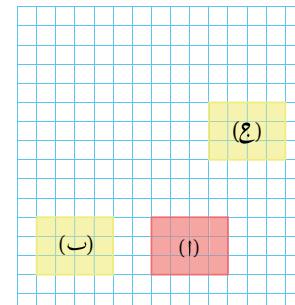
(٢) اكتب مُتجهاً رأسياً لتصف انسحاب الشكل (أ) إلى الشكل (ب)، وانسحاب الشكل (أ) إلى الشكل (ج)، في كلّ مجموعة من الأشكال التالية:



ج

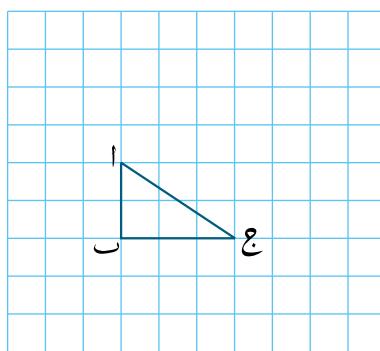


ب



أ

(٣) انسخ الشكل على ورقة مربعات. ثم نفذ انسحاباً على المُثلث أ ب ج حسب كل حالة مما يلي:



أ ثلاثة وحدات إلى اليمين، ووحدةتين إلى الأسفل.

ب ثلاثة وحدات إلى اليسار، ووحدةتين إلى الأسفل.

ج وحدة واحدة إلى اليسار، وثلاثة وحدات إلى الأعلى.

د أربع وحدات إلى اليمين، وثلاثة وحدات إلى الأسفل.

(٤) ارسم محوري الإحداثيات على ورقة مربعات وعيّن عليه النقاط (١، ٢)، (٢، ١)، (٥، ٣)، (٣، ٥).

ع (١، ٤) وصل بينها ثم:

أ ارسم صورة المثلث $\triangle ABC$ بعد تنفيذ الانسحاب $\left(\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right)$ ، وسمّه $\triangle A'B'C'$.

ب ارسم صورة المثلث $\triangle ABC$ بعد تنفيذ الانسحاب $\left(\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}\right)$ ، وسمّه $\triangle A''B''C''$.

(٥) إذا تم تنفيذ انسحاب للمثلث S صع الذي إحداثيات رؤوسه $S(1, 2)$ ، $C(2, 1)$ ، $A(3, 5)$.

ع $\left(\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}\right)$ إلى المثلث $S' C' A'$ باستخدام المتجه $\left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right)$. أوجد إحداثيات النقاط S' ، C' ، A' التي تمثل رؤوس المثلث بعد الانسحاب.

(٦) مستطيل $LMNR$ إحداثيات رؤوسه $L(1, 6)$ ، $M(6, 6)$ ، $N(3, 6)$ ، $R(1, 3)$ تم

تنفيذ انسحاب له باستخدام المتجه $\left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right)$:

أ مثل الانسحاب في المستوى $\triangle LM'R'$
أوجد إحداثيات رؤوس المستطيل L', M', R' .

٣-٨-د التكبير

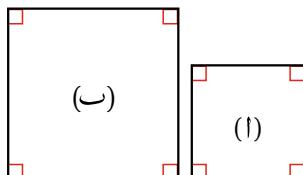
عندما يخضع الشكل الأصلي للتكبير، يتم ضرب طول كل ضلع من أضلاعه في مُعامل التكبير (k)، للحصول على أبعاد الصورة المتكبونة.

وقد يكون مُعامل التكبير عدداً كاملاً أكبر من العدد ١، وهذا يعني أن أبعاد الصورة ستكون أكبر، وعندما يكون مُعامل التكبير كسرًا انتياديًّا، ينتج أن أبعاد الصورة تكون أصغر من أبعاد الشكل الأصلي.

ويجب الإشارة إلى أن قياسات زوايا الأشكال لا تتغير بالتکبير، وهذا يعني أن الشكل الأصلي وصورته يتشاربهان.

$$\text{مُعامل التكبير} = \frac{\text{طول الضلع في الصورة}}{\text{طول الضلع في الأصل}}$$

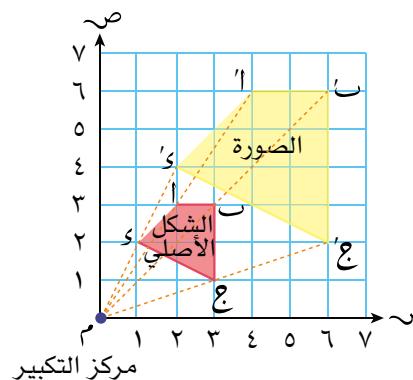
لكن إذا علمت مُعامل التكبير، يمكنك إيجاد أطوال الأضلاع المتماثلة باستخدام الضرب.



يُبيّن الشكل المقابل مربعاً تم تكبيره بـ مُعامل تكبير

$$\text{مقداره } 5; \text{ هذا يعني أن } \frac{\text{طول ضلع المربع } (b)}{\text{طول ضلع المربع } (a)} = 5$$

عندما يتم تكبير الشكل الأصلي من نقطة ثابتة، يكون له مركز تكبير، وهو الذي يحدد موقع الصورة، وتتقاطع فيه الخطوط المستقيمة التي تصل بين نقاط الشكل الأصلي والنقاط المتماثلة لها في الصورة.



وسوف تلاحظ ذلك في الشكل المقابل.

يمكن إيجاد قيمة مُعامل التكبير بِمُقارنة طولي ضلعَيْن

$$\text{مُتماثلين}. \text{ فمثلاً: } \frac{A'B'}{AB} = 2$$

أو بِمُقارنة المسافة بين مركز التكبير M وإحدى النقاط

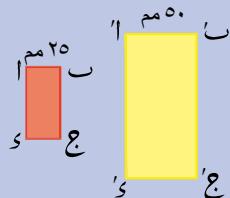
مع المسافة بين مركز التكبير وصورة تلك النقطة.

$$\text{مثلاً: } \frac{M'U}{MU} = 2$$

خصائص التكبير

- قد يكون مركز التكبير في أيّ موقع (داخل الشكل، خارج الشكل، على رأس أو ضلع الشكل).
- مُعامل التكبير الأكبر من 1 يكبر أبعاد الشكل الأصلي، في حين أن مُعامل التكبير الواقع بين 0 و 1 (كسر موجب < 1) يصغر أبعاد الشكل الأصلي، وبالرغم من ذلك يظل اسمه تكبيرًا.
- في التكبير يتضاعف الشكل الأصلي وصورته (لا يتطابقان)، حيث تكون النسبة بين أطوال الأضلاع ثابتة، وتتساوي $1:k$ ، حيث k مُعامل التكبير.
- تبقي قياسات الزوايا واتجاه الشكل الأصلي ثابتة لا تتغير.

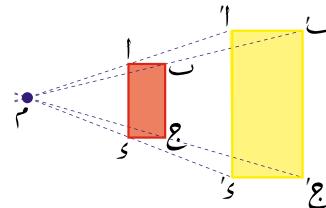
مثال ٨



يبين الشكل المقابل المستطيل $A'B'C'D'$ وصورته $A'B'C'D'$ بعد تنفيذ تكبير ما.
أوجد مركز التكبير ومُعامل التكبير.

الحل:

صل بين النقطة A وصوريتها A' .
مُدداً في كلا الاتجاهين. وبالمثل، ارسم ومُدداً من B, C, D ، B', C', D' .
تكون نقطة تقاطع هذه الخطوط المستقيمة هي مركز التكبير M .

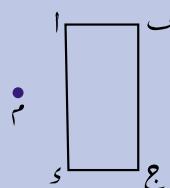


أوجد قياس A ، A'
النسبة $A':A$: A تعطي مُعامل التكبير.

$$A = 25 \text{ مم}$$

$$A' = 50 \text{ مم}$$

$$\text{مُعامل التكبير} = \frac{50}{25} = 2$$

مثال ٩

ارسم صورة المستطيل $A'B'C'D'$ ، بعد تنفيذ تكبير مركزه النقطة M ومعامل تكبيره 2 ، أوجد المسافات مستخدماً الرسم المعطى.

الحلّ:

صل M . مدد الخط المستقيم ليتجاوز النقطة A .

أوجد طول $M A$

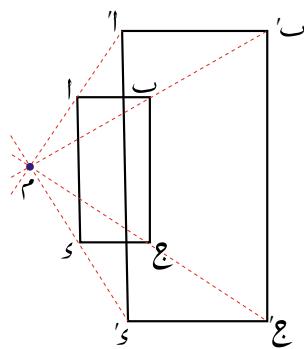
اضرب طول $M A$ في 2 (معامل التكبير)

حدّد موقع النقطة A' على الخط المستقيم الممتد، بحيث

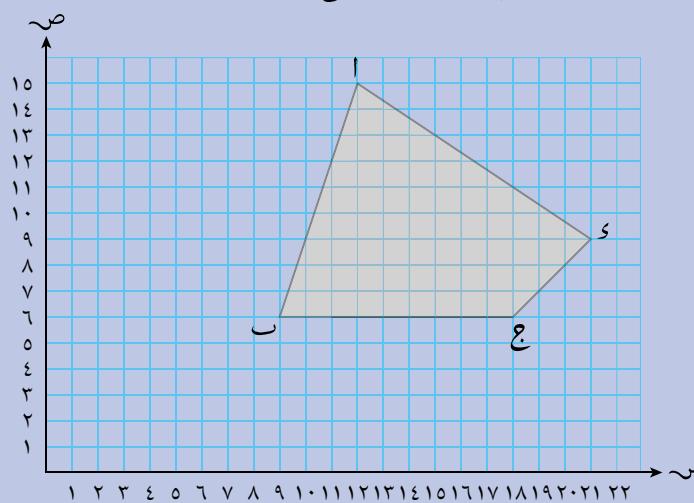
يكون $M A' = 2 M A$

كرر الخطوات نفسها مع باقي رؤوس المستطيل.

صل $A' B' C' D'$

**مثال ١٠**

إذا علمت أن الشكل $A'B'C'D'$ ، صورة الشكل $A'B'C'D'$ بعد تكبيره بـ $\frac{1}{3}$ مركبة نقطة الأصل، ارسم الشكل $A'B'C'D'$.

**الحلّ:**

معامل التكبير $\frac{1}{3}$ يعني أن الصورة ستكون أصغر من الشكل الأصلي.

حدّد إحداثيات كل رأس من رؤوس صورة الشكل. بضرب إحداثيات رؤوس الشكل الأصلي

(x, y) في $\frac{1}{3}$

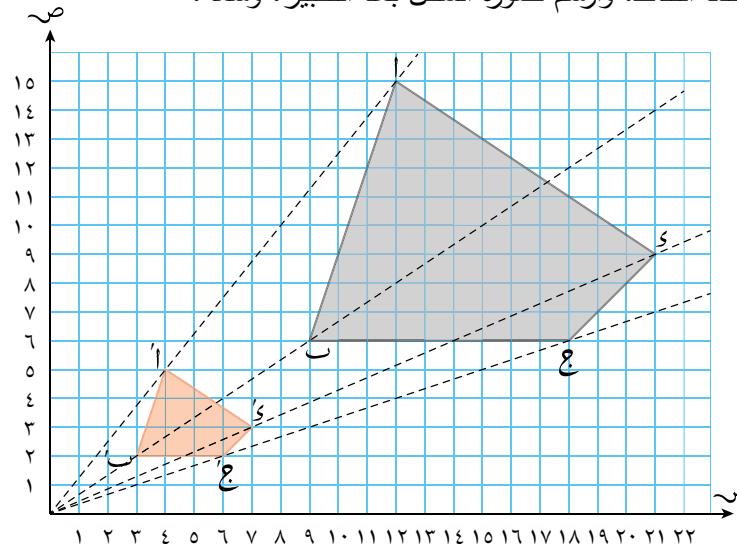
$$ا = (15, 12), (4, 1) = (5, 0)$$

$$ب = (6, 9), (2, 3) = (2, 6)$$

$$ج = (6, 18), (6, 2) = (2, 6)$$

$$د = (7, 21), (9, 2) = (3, 7)$$

حدّد النقاط، وارسم صورة الشكل بعد التكبير، وسمّه.



يمكنك أيضًا قياس طول القطعة المستقيمة الوادلة من نقطة الأصل إلى كل رأس من رؤوس الشكل الأصلي، وقسمة هذه الأطوال على 3، لتحدد موقع كل رأس من رؤوس الصورة. هذه الطريقة مفيدة عندما لا يكون الشكل مرسومًا على شبكة إحداثيات.

مثال ١١

ارسم صورة المستطيل $اب ج د$ بتكبير معامله -2، ومركزه نقطة الأصل.

الحل:

اضرب إحداثيات رؤوس المستطيل في -2

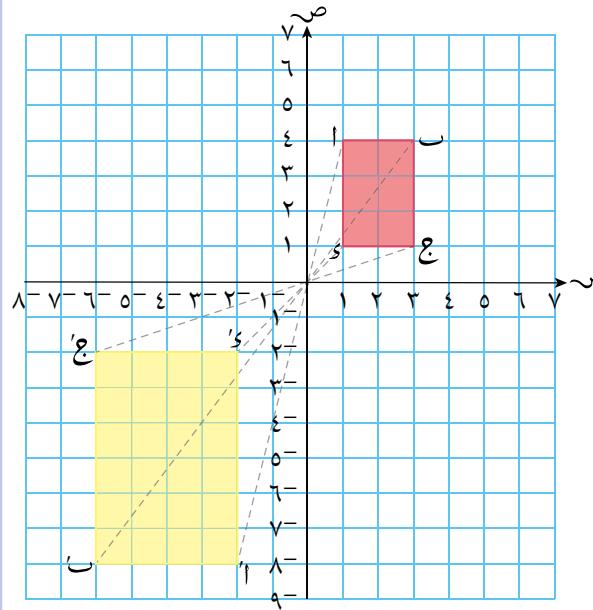
$$(1, 4), (1, -4) \rightarrow (-2, 4), (-2, -4)$$

$$(3, 2), (3, -2) \rightarrow (-6, 2), (-6, -2)$$

$$(1, 1), (1, -1) \rightarrow (-2, 1), (-2, -1)$$

حدّد النقاط على المستوى الإحداثي.

تأكد من تسمية النقاط بصورة صحيحة.



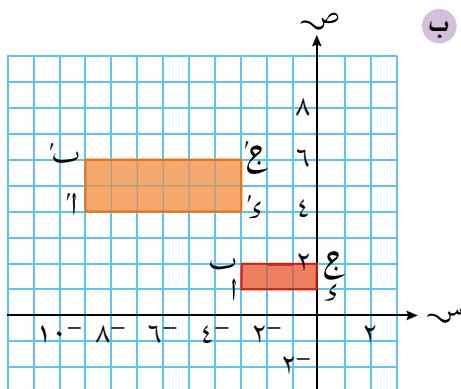
إذا وقعت النقطة وصورتها على جانبيين مُتقابلين من مركز التكبير، فهذا يعني أن معامل التكبير سالب.

مساعدة

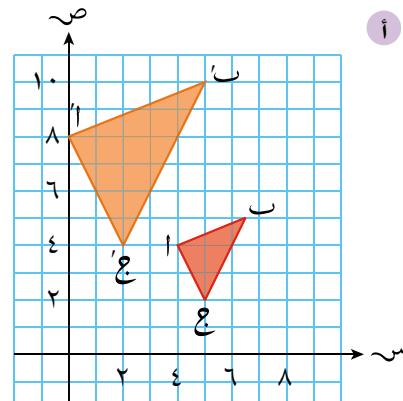
يسمح لك رسم الخطوط المنقطعة من كل رأس بالتحقق من أن النقاط على الصورة تقع على المستقيم نفسه مع النقاط المُناظرة لها على الشكل الأصلي.

تمارين ٨-٣-٤

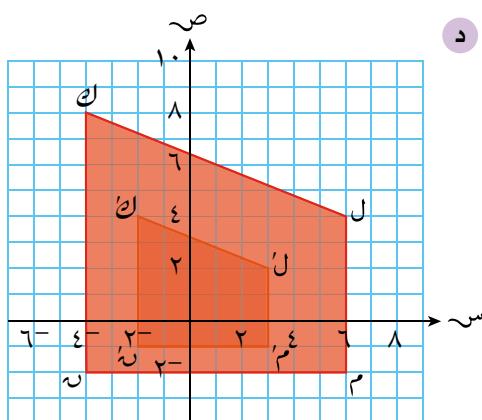
(١) حدد إحداثيات مركز التكبير ومعامل التكبير في كل مما يلي:



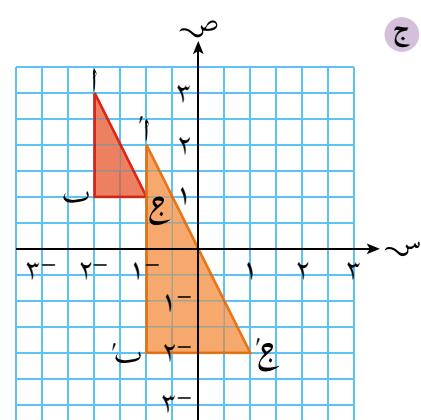
ب



أ

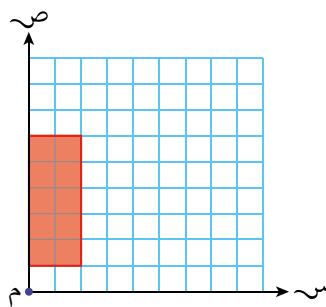


د

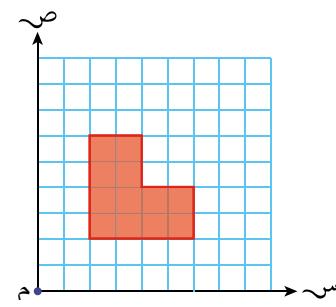


ج

(٢) استخدم نقطة الأصل مركزاً للتكبير، ومعامل تكبير مقداره ٣، لترسم صورة كل شكل بعد التكبير في كل مما يلي:



ب



أ

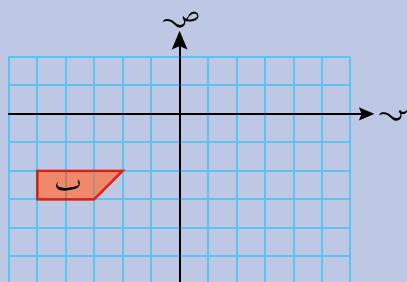
٤-٨ تركيب التحويلات الهندسية

تعلّمت من قبل أنك تستطيع إجراء تحويل هندسي على شكل ما يُحوله إلى صورة، ويمكن أيضًا إجراء تحويلين هندسيين على شكل ما بالتتابع. مثلاً، يمكن أن يخضع الشكل لانعكاس حول المحور السيني، ثم دوران ربع دورة، أو يمكن أن يخضع للدوران أولاً، ثم لانعكاس حول المحور الصادي، ويمكن أحياناً، وصف تركيب التحويلات الهندسية في تحويل هندسي وحيد مكافئ لهذا التركيب.

تُستخدم الحروف التالية عادة لتمثيل التحويلات الهندسية المختلفة:

- م انعكاس
- د دوران
- ح انسحاب
- ك تكبير

مثال ١٢

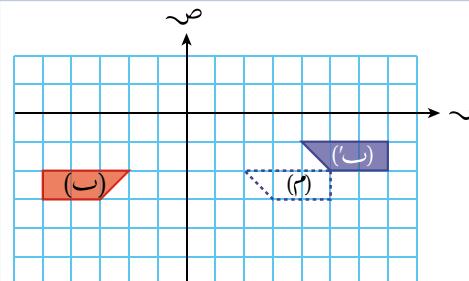


في الشكل (ب) المعروض في المخطط المقابل،
ليكن ح انسحاباً باستخدام المتجه الرأسي (١)،
م انعكاساً حول المحور الصادي:

- رسم الصورة (ب) بعد إجراء التحويل الهندسي ح م(ب)
- رسم الصورة (ب") بعد إجراء التحويل الهندسي م ح(ب)
- ما التحويل الهندسي الوحيد الذي يحول (ب) إلى (ب")؟

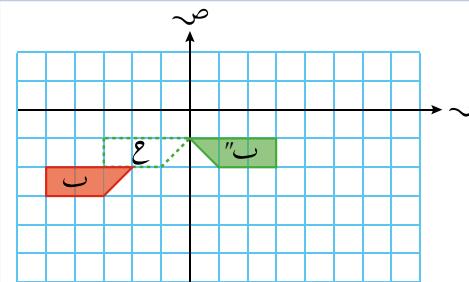
الحل:

ح م (ب) يعني إجراء م أولاً، ثم ح.
استخدم قلم رصاص. نفذ التحويل الهندسي الأول وارسم الشكل مُنقطاً. نفذ التحويل الهندسي الثاني، وارسم الصورة، وسمّها بطريقة صحيحة.



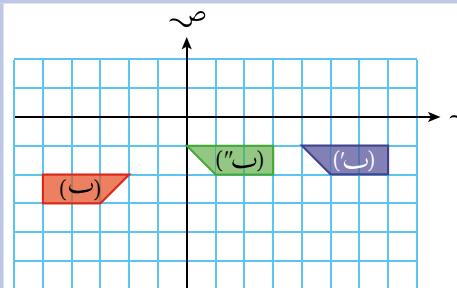
أ

م ح (ب) يعني إجراء ح أولاً، ثم م.
استخدم قلم رصاص. نفذ التحويل الهندسي الأول وارسم الشكل مُنقطاً. نفذ التحويل الهندسي الثاني، وارسم الصورة، وسمّها بطريقة صحيحة.

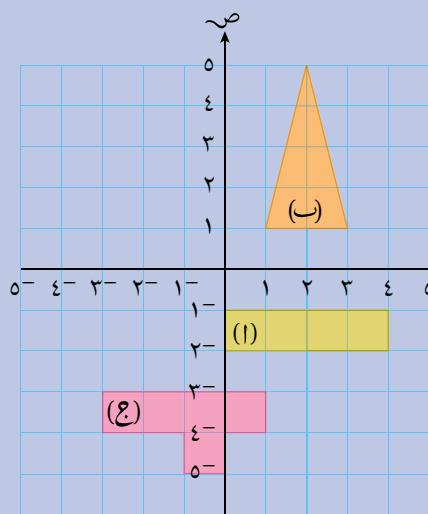


ب

يمكن تحويل (ب) إلى (ب")
بالانسحاب باستخدام المتجه $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.



(ج)

مثال ١٣

ارسم صورة كلّ شكل بعد تنفيذ التحويل الهندسي المُعطى على نفس المستوى الإحداثي:

- أ انعكاس الشكل (أ) حول الخط المستقيم

$$ص = -س - 2$$

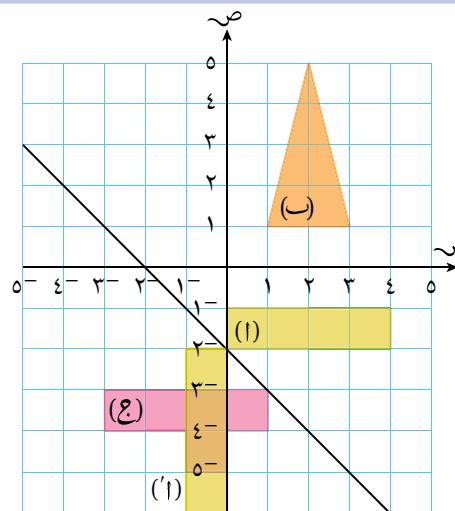
- ب دوران الشكل (ب) بزاوية قياسها 90° عكس س اتجاه عقارب الساعة حول النقطة (٢، ٤).

- ج انعكاس الشكل (ج) حول الخط المستقيم
 $ص = -3$ ، ثم دوران الصورة بزاوية قياسها 270° مع اتجاه عقارب الساعة حول النقطة (١، ١).

الحل:

ارسم محور الانعكاس الذي معادلته
 $ص = -س - 2$

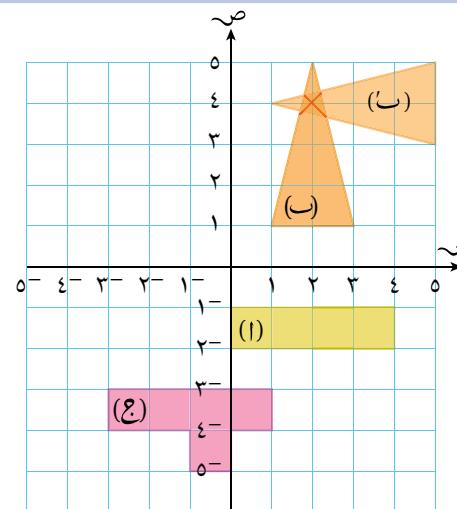
ارسم انعكاساً للشكل (أ) حول محور الانعكاس.



(أ)

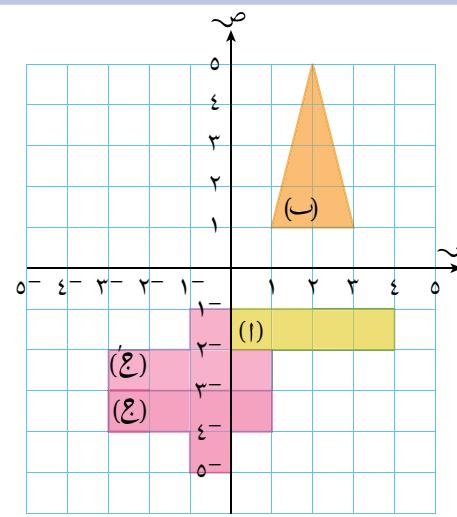
حدد مركز الدوران (٢، ٤).

ارسم دورانًا للشكل (ب) حول مركز الدوران بزاوية قياسها 90° عكس اتجاه عقارب الساعة.



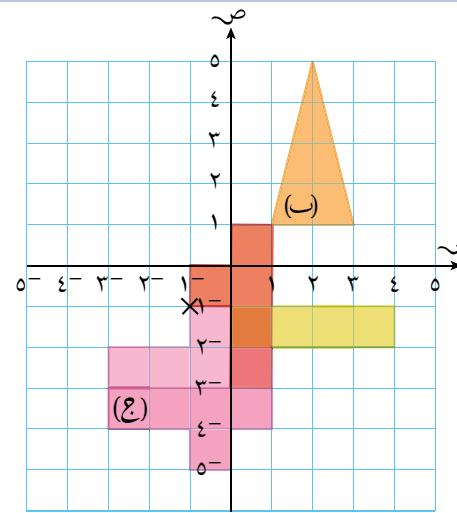
ب

ارسم انعكاساً للشكل (ج) حول المستقيم الذي معادلته $x = -3$.



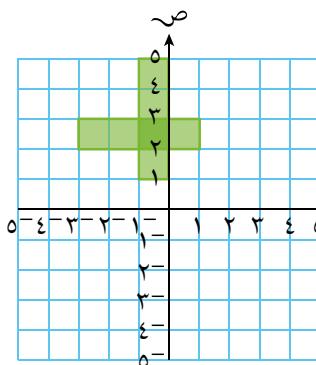
ج

ارسم دورانًا للصورة الناتجة حول النقطة $(-1, -1)$ بزاوية قياسها 270° مع اتجاه عقارب الساعة.

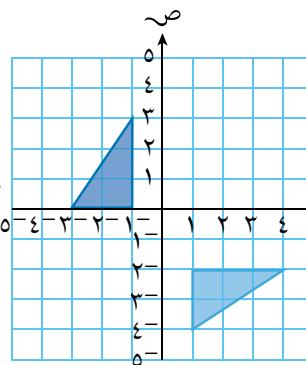


تمارين ٤-٨

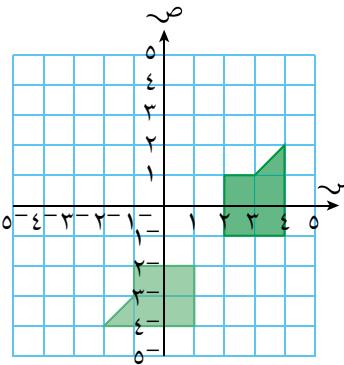
١ أوجد معادلة محور الانعكاس في كل مما يأتي:



ج

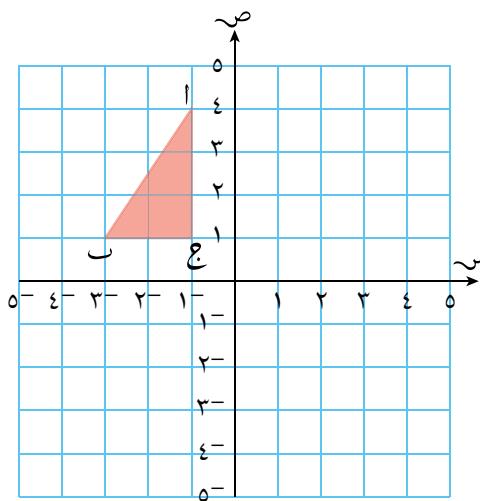


ب



أ

٢ ارسم كلّ شكل فيما يلي على شبكة إحداثيات ونفّذ الدوران المُعطى.

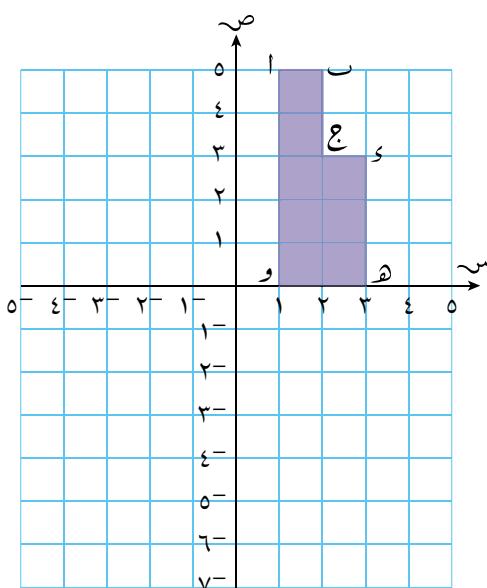


أ دوران المثلث أ ب ج حول النقطة

(-2, 2)، وبزاوية قياسها 90°

عكس اتجاه عقارب

الساعة.

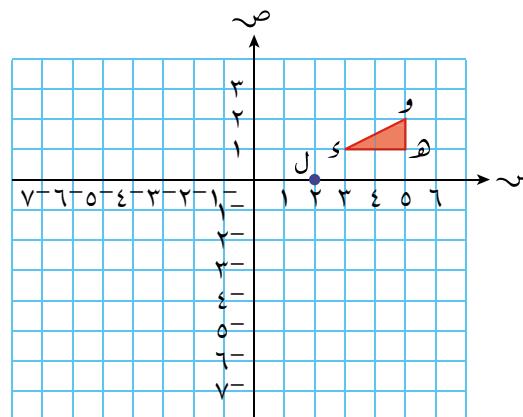


ب دوران الشكل أ ب ج و

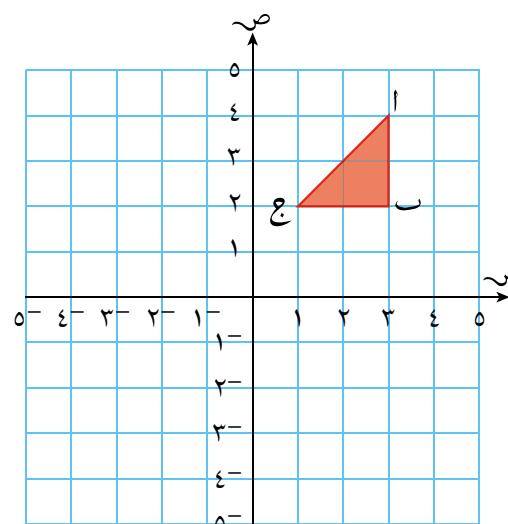
حول النقطة (1, -1)،

وبزاوية قياسها 180°

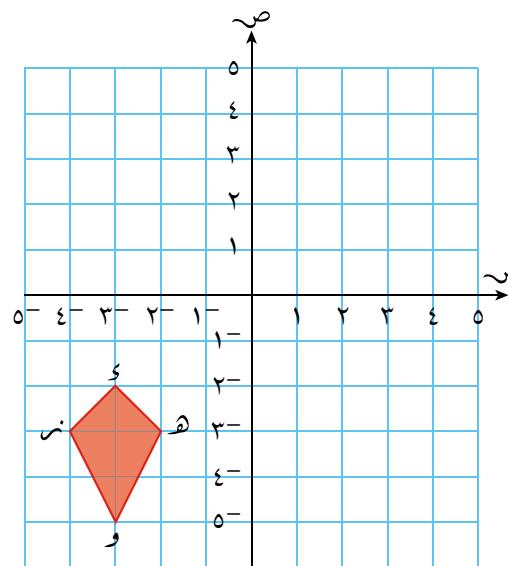
(٣) ارسم صورة المثلث $\triangle h$ و بتكبير معامله -3 ، و مركزه النقطة $L(2, 0)$.



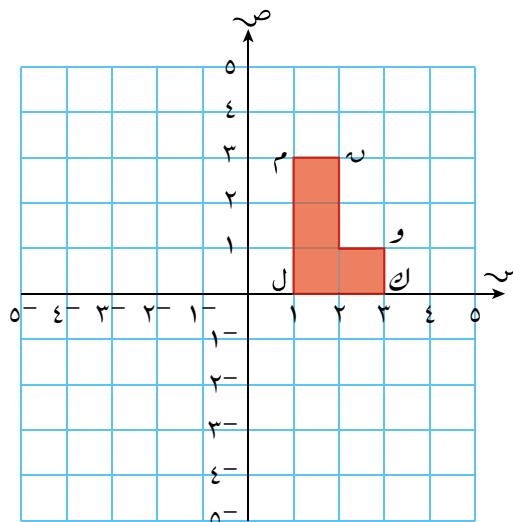
(٤) ارسم صورة الشكل المعطى بتكبير معامله -1 ، ومركزه نقطة الأصل.



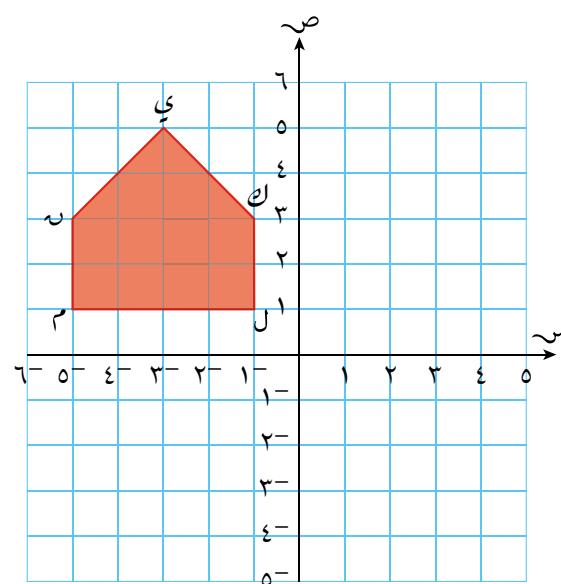
(٥) ارسم صورة الشكل $\triangle h$ و n بتكبير معامله -2 ، ومركزه النقطة $(-1, -1)$.



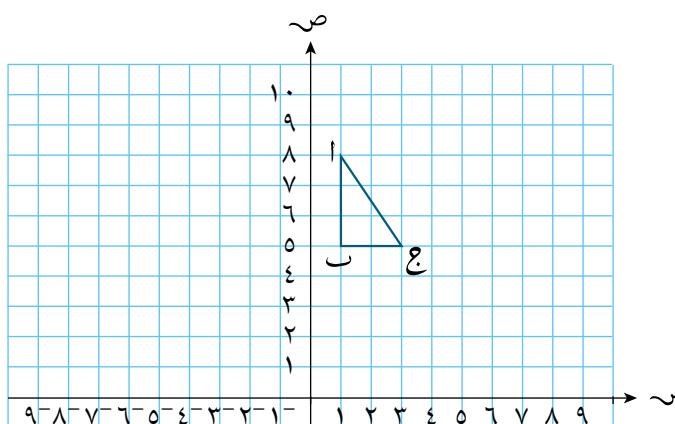
٦) ارسم صورة الشكل التالي بتكبير مُعامله $-1,5$ ، ومركزه النقطة $(1, 0)$.



٧) ارسم صورة الشكل التالي بتكبير مُعامله $-\frac{1}{2}$ ، ومركزه نقطة الأصل.

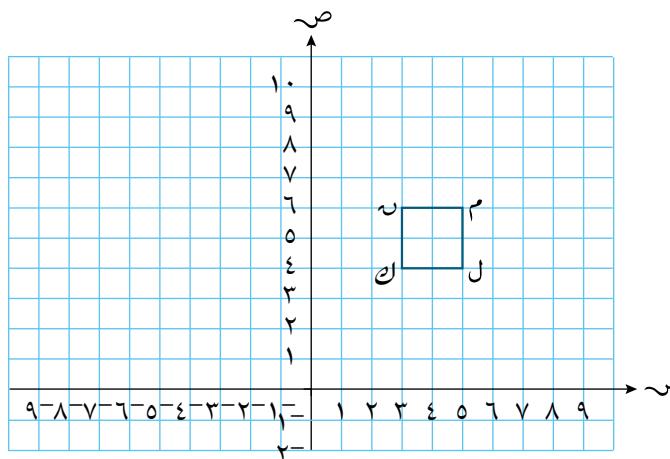


- ٨) صورة المُثلث $A'B'C'$ هي المُثلث $A''B''C''$ بتكبير معامله ٢، ومركزه النقطة $(2, 5)$ ، تم تحويل المُثلث $A'B'C'$ إلى المُثلث $A''B''C''$ بالانعكاس حول المستقيم $S = 1$



- أ) ارسم الصورة $A'B'C'$ وسمّها.
ب) ارسم الصورة $A''B''C''$ وسمّها.

- ٩) إذا كانت صورة المُربع $L'M'N'$ بتكبير معامله ١، ٥ ومركزه النقطة $(3, 4)$ هي $L''M''N''$ ، وصورة المُربع $L'M'N'$ بالدوران بزاوية قياسها 180° حول النقطة $(6, 0)$ هي $L'''M'''N'''$ ، بين موقع الشكلين $L''M''N''$ ، $L'''M'''N'''$ على مستوى الإحداثيات.



ملخص

ما يجب أن تعرفه:

- لتصف الدوران وصفاً كاملاً، يجب أن تعطى قياس زاوية الدوران ومركزه واتجاهه.
- لتصف الانسحاب، يمكنك استخدام متجه الإزاحة (ص).
- لتصف التكبير، يجب أن تعطى معامل التكبير ومركزه.

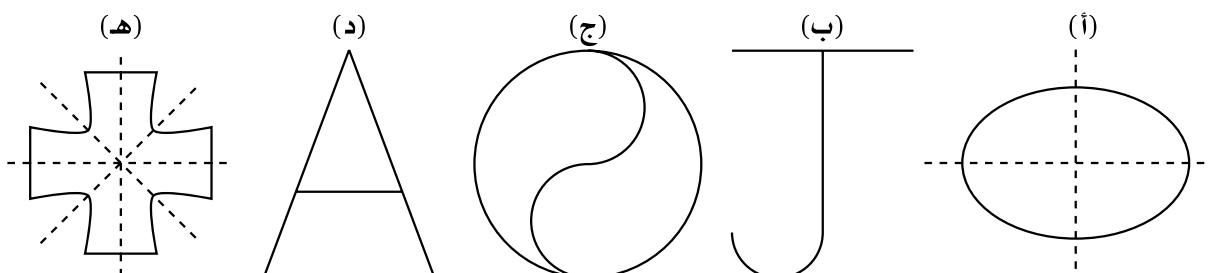
يجب أن تكون قادراً على:

- تمييز الدوران ومحور التماثل في أشكال ثنائية الأبعاد.
- إيجاد رتبة التماثل الدوراني في أشكال ثنائية الأبعاد.
- تمييز التماثل الدوراني والتماثل حول محور في أشكال ثلاثة الأبعاد.
- رسم صورة نقاط وأشكال مستوية بانعكاس حول خط مستقيم أفقي وخط مستقيم رأسي.
- رسم صورة أشكال مستوية بدوران حول نقطة الأصل أو أحد رؤوس الشكل أو نقاط منصفات الأضلاع.
- وصف الانسحاب باستخدام متجه رأسي.
- تنفيذ انسحاب لأشكال مستوية باستخدام متجه رأسي.
- إنشاء تكبير لأشكال مستوية باستخدام معامل التكبير ومركزه.
- تمييز ووصف تحويل هندسي واحد أو تحويلات هندسية مركبة.

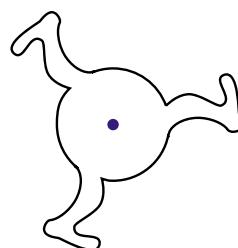
- إذا أمكن طيّ شكل ليتطابق أحد النصفين تماماً مع النصف الآخر، يكون الشكل متماثلاً حول محور.
- يمكن أن يكون للأشكال أكثر من محور تماثل. عدد محاور تماثل المُضلَّع المُنتظم تتساوى مع عدد أضلاعه.
- إذا خضع شكل لدوران حول نقطة ما (مركز الدوران) دورة كاملة واحدة، وتطابق مع نفسه مرة واحدة على الأقل، يكون له تماثل دوراني.
- تدلّك رتبة التماثل الدوراني على عدد مرات تطابق الشكل مع نفسه في دورة كاملة واحدة.
- يمكن للأشكال ثلاثة الأبعاد أن يكون لديها تماثل أيضاً.
- إذا أمكن تقسيم مجسم بمستوى لتشكيل قسمين أحدهما صورة مرآة للآخر، يكون للمجسم مستوى تماثل.
- إذا تم دوران شكل ثلاثي الأبعاد حول محور وظهر الشكل نفسه عند موقع أو أكثر خلال دورة واحدة كاملة، يكون له تماثل دوراني.
- يتضمن التحويل الهندسي تغييراً في الموقع وأبعاد الشكل أو في أحدهما.
- الانعكاس هو صورة للشكل، والدوران هو حركة الشكل دائرياً، والانسحاب هو إزاحة الشكل، والتكبير هو تزايد أو تناقص في أبعاد الشكل.
- لتصف الانعكاس وصفاً كاملاً، يجب أن تعطى معادلة محور الانعكاس.

تمارين نهاية الوحدة

(١) أي الأشكال الآتية لها محور تماثل وتماثل دوراني في آن واحد؟



(٢) ما هي رتبة التماثل الدوراني للشكل المقابل؟

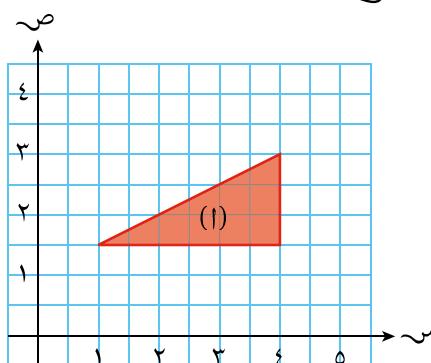


(٣) ارسم التحويلات الهندسية الآتية للمثلث (ا) في الشكل المقابل على شبكة المربعات:

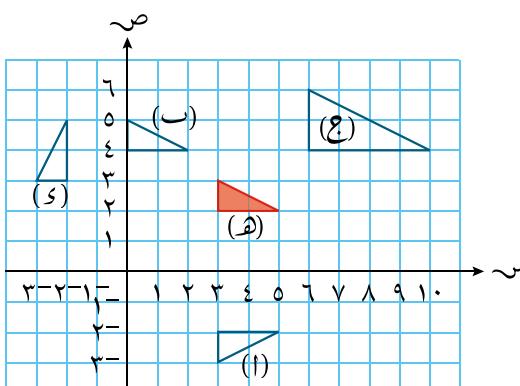
انعكاس المثلث (ا) حول المحور الصادي، وسمّه المثلث (ب).

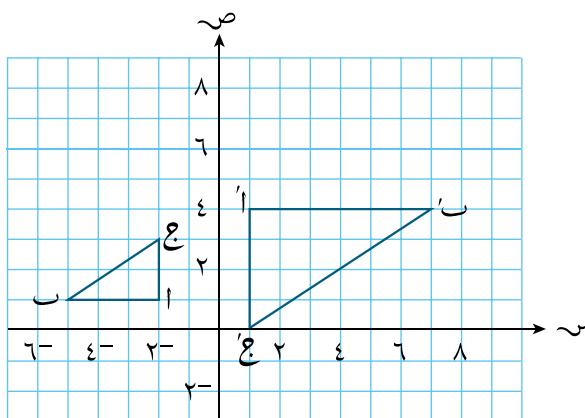
دوران المثلث (ا) بزاوية قياسها 180° حول النقطة (٤، ٤)، وسمّه المثلث (ج).

تكبير المثلث (ا) بمعامل تكبير مقداره ٢، ومركزه النقطة (٤، ٥)، وسمّه المثلث (د).



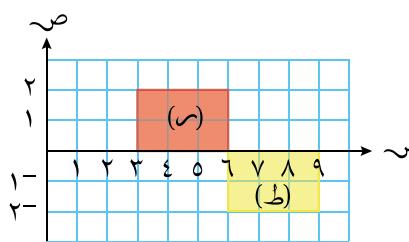
(٤) صف التحويل الهندسي الذي يحوّل المثلث (هـ) إلى كل من المثلثات (ا)، (ب)، (ج)، (د) المرسومة في الشكل المقابل.





٥) إذا تم تكبير المثلث $A'B'C'$ إلى المثلث $A'B'C'$ ، أوجد:

- أ) مركز التكبير.
- ب) معامل التكبير

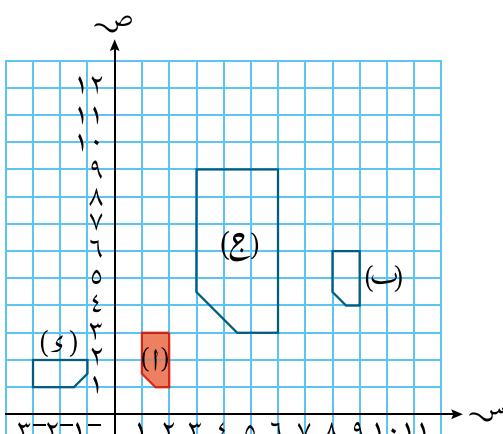


٦) اكتب المتجه الرأسى للانسحاب الذى يحوّل المستطيل (S) إلى المستطيل (T) .

صف تحويلًا آخر (غير الانسحاب) يمكنه أيضًا تحويل المستطيل (S) إلى المستطيل (T) .

(١) انسخ الشكل المُقابل على شبكة مربعات ثم نفذ تكبيرًا على المستطيل (S) بمعامل تكبير مقداره ٢ ومركزه النقطة $(2, 10)$.

(٢) أوجد نسبة مساحة المستطيل (T) إلى مساحة المستطيل (S) ، واكتبهما في أبسط صورة.



٧) في كل حالة، صِف التحويل الهندسيّ الذي يحوّل الشكل (١) إلى:

- (١) الشكل (٢).
- (٢) الشكل (٣).
- (٣) الشكل (٤).

ب) حدد الشكل الذي مساحته تساوي مساحة الشكل (١).

٨) أجب عن الأسئلة الآتية على ورقة رسم بياني:

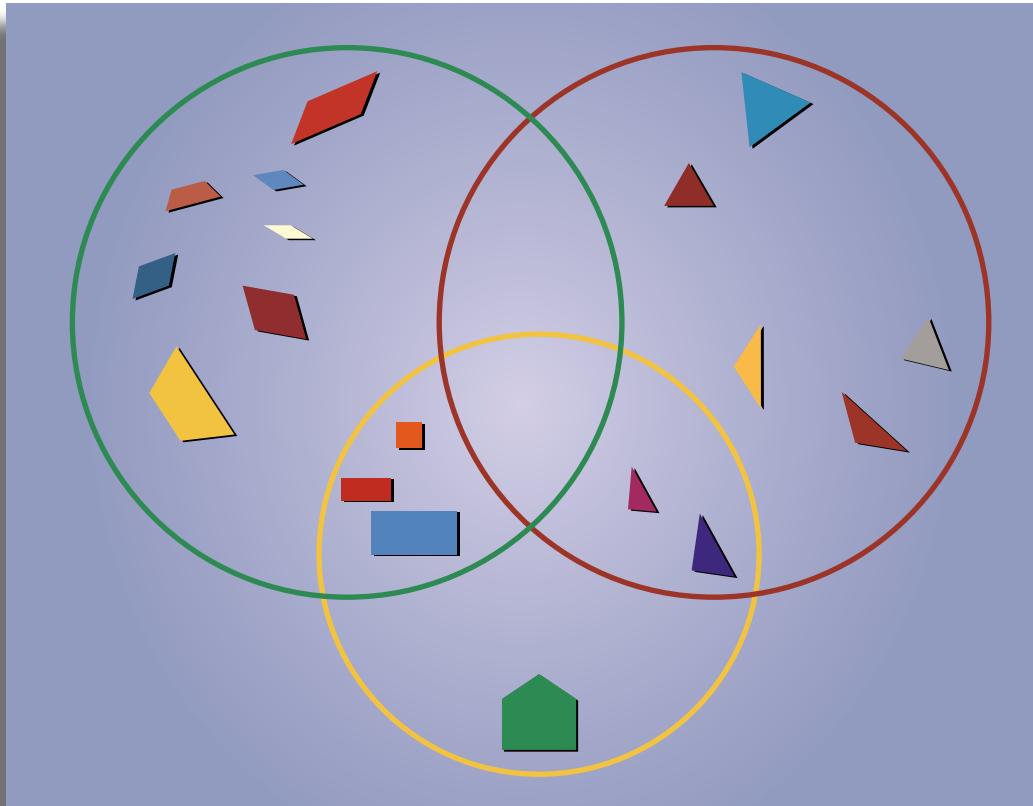
أ) ارسم محوريين بتدريج من -6 إلى 6 ، باستخدام المقياس ١ سم، لتمثيل وحدة واحدة على كل محور ثم:

- (١) حدد النقاط $(5, 0)$ ، $(1, 3)$ ، $(-1, 2)$ ، $(-1, -2)$ ، وارسم المثلث $A'B'C'$.
- (٢) حدد النقاط $(3, 4)$ ، $(1, -3)$ ، $(-1, -2)$ ، وارسم المثلث $A'B'C'$.

ب) (١) ارسم المستقيم (L) ، بحيث تكون صورة المثلث $A'B'C'$ بالانعكاس حوله هي المثلث $A'B'C'$.

- (٢) اكتب معادلة المستقيم (L) .

الوحدة التاسعة: المُتتاليات والمجموعات



المفردات

Sequence	المُتتالية
Term	الحد
	قانون الحد إلى الحد
Term-to-term rule	الحد النوني / الحد العام
	<i>n</i> th term rule
Set	المجموعة
Element	العنصر
Empty set	المجموعة الخالية
	المجموعة الشاملة
Universal set	
Complement	المُتمم
Union	الاتحاد
Intersection	التقاطع
Subset	المجموعة الجزئية
Venn diagram	مخطط فن
	صيغة الصفة المُميزة
	Set builder notation

سوف تتعلم في هذه الوحدة: كيف:

- تصف قانون استكمال المُتتالية.
- تجد الحد النوني (الحد العام) لبعض المُتتاليات.
- تستخدم الحد النوني لتجد حدوداً لاحقة في المُتتالية.
- تشتئ مُتتالية وتصفها من أنماط الأشكال.
- تذكر عناصر مجموعة تم وصفها باستخدام القانون إضافة إلى التعريف.
- تجد اتحاد المجموعات وتقاطعها.
- تجد متممات المجموعات.
- تمثل المجموعات وتحل المسائل باستخدام مخطط فن.

إن تجميع الأشكال التي لها نفس الخصائص في مجموعات يساعد على توضيح الروابط بين المجموعات. تم في الرسم أعلاه تجميع الأشكال بالاستناد إلى عدد أضلاعها، إضافة إلى الأشكال التي تتضمن زاوية قائمة.

ما عدد الطالب الذين يدرسون التاريخ في مدرستك؟ وما عدد الطالب الذين يدرسون الفنون؟ إذا تم تنظيم حدث عن الطالب الذين يدرسون أيّاً من الموضوعين، فكم سيكون عددهم؟ إذا اخترت طالباً بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون من الذين يدرسون كلا المادتين؟ نلاحظ أن تصنيف الأشخاص ضمن مجموعات مُناسبة يمكن أن يُساهم في الإجابة عن هذه الأنواع من الأسئلة!

١-٩ المُتتاليات

المُتتالية هي قائمة مرتبة من الأعداد أو الحروف أو الأشياء التي دونت بترتيب معين، مع وجود بعض الروابط بينها، حيث تتوفر في العادة صيغة ستخبرك بالعدد أو الحرف أو الكلمة أو الشيء الذي سيأتي تالياً، ويطلق على كلّ عدد أو حرف أو شيء في المُتتالية اسم **الحدّ**. يُسمى أي حدّين متقاربين بالحدّين المُتتاليين.

١-٩ أ- قانون الحد إلى الحد

فيما يلي بعض المُتتاليات مع القاعدة الخاصة بها والتي تدل على كيفية استمرار بناء المُتتالية: ٢، ٨، ١٤، ٢٠، ٢٦، ... (احصل على الحد التالي بإضافة العدد ٦ إلى الحد السابق له مباشرة).

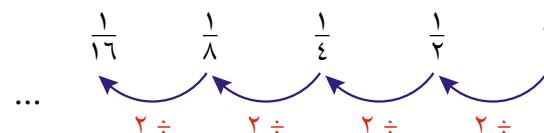
يمكن عرض النمط من خلال رسمه بالطريقة الآتية:



عندما تحاول تحديد النمط المُتبع في المُتتالية، ابدأ بالأشياء البسيطة. ستجد غالباً أن الإجابة الأبسط هي الإجابة الصحيحة.

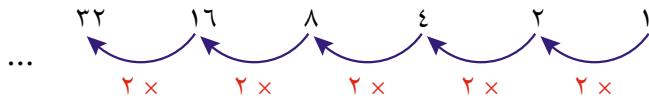
١، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، ... (اقسم كلّ حدّ على العدد (٢) لتحصل على الحد التالي له مباشرة).

ويمكن رسم مخطط لعرض حدود المُتتالية:



١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ... (احصل على الحد التالي بضرب الحد السابق له مباشرة في العدد (٢)).

ويمكن عرض حدود المُتتالية:



رابط

غالباً ما يحتاج الكيميائيون إلى فهم كيفية تغير الكتيريات مع الزمن. يساعد فهم المُتتالية أحياناً الكيميائيين ليفهموا كيف يتم الفاعل الكيميائي، وكيف يمكن التنبؤ بالنتائج.

يُسمى القانون الذي يعطي الحد التالي في المُتتالية **قانون الحد إلى الحد**.

يمكن أن تتضمن المُتتاليات حدوداً غير عدديّة. مثل المُتتالية الآتية المعروفة جدًا: أ، ب، ج، د، ه، و، ز، ح، ...

في هذا المثال، تتوقف المُتتالية عند العنصر رقم ٢٨، وعليه تُسمى مُتتالية مُنتهية. المُتتاليات الثلاث السابقة ليس ضروريًا أن تتوقف، وبناءً على ذلك فهي مُتتاليات غير مُنتهية (إلا إذا رغبت في إيقافها عند نقطة مُحددة).

تمارين ١-٩-أ

(١) ارسم مخططاً تعرّض فيه كيف تستمر كلّ مُتتالية فيما يلي، ثمّ أوجد حدودها الثلاثة التالية:

- | | |
|---|-------------------------------|
| ب ... ، ٢٣ ، ١٨ ، ١٣ ، ٨ ، ٣ | أ ... ، ١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ |
| د ... ، ٦ ، ٥ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٠ ، ٥ | ج ... ، ٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ |
| ه ... ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ | ه ... ، ٤ ، ٢ ، ٥ ، ٨ |
| ز ... ، ٦ ، ٤ ، ٨ ، ٣ ، ٦ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ٤ ، ١ ، ١ ، ٠ ، ١ | ح ... ، ١ ، ٣ ، ١ ، ٣ ، ١ ، ٣ |

(٢) أوجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ من المُتتاليتين الآتيتين، ووضّح القانون الذي استخدمته في كلّ حالة:

- ب الاثنين ، الثالثاء ، الأربعاء ، الخميس ، ... أ ... ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ...

١-٩-ب علاقة الحد برتتبته في المُتتالية

فكّر في المُتتالية التالية:

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

يجب أن تكون قد أدركت أن هذه الأعداد هي أول خمسة أعداد مربعة، وعليه فإن:

$$\text{الحد الأول} = 1 = 1 \times 1$$

$$\text{الحد الثاني} = 4 = 2 \times 2$$

$$\text{الحد الثالث} = 9 = 3 \times 3$$

وهكذا ...

يمكنك أن تكتب المُتتالية في جدول يعرض رتبة كلّ حدّ وقيمه:

رتبة الحد (ن)	قيمة الحد (ن)
١	١
٢	٤
٣	٩
٤	١٦
٥	٢٥
٦	٣٦
٧	٤٩
٨	٦٤
٩	٨١

لاحظ أن رتبة الحد أُعطيت الحرف (ن) هذا يعني، مثلاً، أن $n = 3$ هو الحد الثالث، وأن $n = 100$ هو الحد المائة. القاعدة التي تُعطى كلّ حدّ بحسب رتبته، هي:

حد الرتبة (ن) = n^2 ويسمى بالحد النوني أو الحد العام.

$$\text{الحد النوني} = n^2$$

فَكِّرُ الآن في مُتَتَالِيَةٍ حَدُّهَا النُّونِي $= 3n + 2$

في الحدّ الأول، $n = 1$ ، أي إن الحدّ الأول هو $3 \times 1 + 2 = 5$

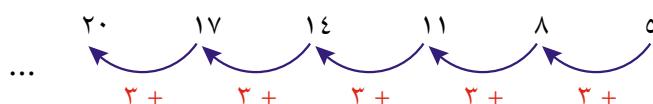
في الحدّ الثاني، $n = 2$ ، أي إن الحدّ الثاني هو $3 \times 2 + 2 = 8$

في الحدّ الثالث، $n = 3$ ، أي إن الحدّ الثالث هو $3 \times 3 + 2 = 11$

عند استكمال المُتَتَالِيَةِ وكتابتها في جدول، ستحصل على:

n	الحد
9	8
8	7
7	6
6	5
5	4
4	3
3	2
2	1
1	5
...	...
29	26
26	23
23	20
20	17
17	14
14	11
11	8
8	5

إذا رسمت مُخْطَطًا لعرض حدود المُتَتَالِيَة، ستحصل على:



لاحظ أن العدد المُضَافُ إلى كلّ حدٍ في المُخْطَط يظهر في قاعدة الحد النُّونِي (هو العدد المضروب في n أو مُعامل n).).

يحصل ذلك في أي مُتَتَالِيَة، عندما يتم الانتقال من حدٍ إلى الحد التالي له مُباشرة، بإضافة (أو طرح) عدد ثابت. يُسَمَّى العدد الثابت الفرق المُشترَك.

على سبيل المثال، إذا أنشأت جدولًا للمُتَتَالِيَة ذات الحد العام $= 4n - 1$ ، ستحصل على:

n	الحد
9	8
8	7
7	6
6	5
5	4
4	3
3	2
2	1
1	3
...	...
35	31
31	27
27	23
23	19
19	15
15	11
11	7
7	3

هنا، يمكنك أن تُلَاحِظ إضافة العدد 4 عند الانتقال من أي حدٍ إلى الحد التالي له مُباشرة. وهذا العدد هو مُعامل n الذي يظهر في قانون الحد العام.

يعرض المثال الآتي كيفية إيجاد الحد النوني (الحد العام) لمُتتالية ما.

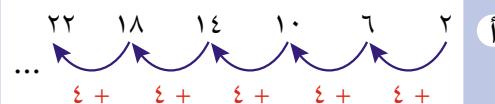
مثال ١

- أ** ارسم مخططاً يبين الصيغة التي تساعدك على استكمال المُتتالية الآتية، ثم أوجد حدّها العام.
- ... ، ٢٦ ، ٢٢ ، ١٨ ، ١٤ ، ١٠ ، ٦ ، ٢
- ب** أوجد الحد الأربعين في المُتتالية.
- ج**وضح كيف تعرف أن العدد ٥٠ هو حد في المُتتالية، ثم حدد رتبته فيها.
- د**وضح كيف تعرف أن العدد ١٢٨ ليس من المُتتالية.

الحل:

لاحظ أن العدد الذي تمت إضافته في كل مرة هو العدد ٤. يدلّ هذا على أن مُعامل ن في الحد العام هو ٤، إذن، سيشكل (٤n) جزءاً من قانون الحد العام.
وإلا، فكّر بأيّ حد في المُتتالية ولتكن الحد الثالث (تنكر أن قيمة n تعطي رتبة الحد في المُتتالية). جرب مع ٤n لتعرف على ماذا ستحصل عندما n = ٣؛ تحصل على الإجابة ١٢، ولكن الحد الثالث هو ١٠، لذا يجب أن تطرح ٢
يجب أن تتحقق من ذلك.

اختر القانون عند أيّ حد، ولتكن الحد الخامس. عوض n = ٥ في القانون.
لاحظ أن الحد الخامس هو فعلاً ١٨



$$\text{إذا كانت } n = 3$$

فإن

$$4n = 4 \times 3 = 12$$

$$4n - 2 = 10$$

$$\text{حاول عندما } n = 5$$

$$4n - 2 = 4 \times 5 - 2 = 18$$

$$\therefore \text{قانون الحد العام} = 4n - 2$$

لإيجاد الحد الأربعين في المُتتالية، عليك ببساطة التعويض بقيمة n = ٤٠ في قانون الحد العام.

$$\begin{aligned} \text{الحد } 40 &:: n = 40 \\ 4 \times 40 - 2 &= 158 \end{aligned}$$

إذا كان العدد ٥٠ في المُنتالية، يجب أن تكون هناك قيمة صحيحة موجبة للرتبة ن تجعل $4n - 2 = 50$ ؛

أكتب المعادلة بدلالة ن وذلك بإضافة ٢ إلى الطرفين.

اقسم الطرفين على ٤

$$4n - 2 = 50$$

$$4n - 2 + 2 = 50 + 2$$

$$4n = 52$$

$$n = \frac{52}{4} = 13$$

بما أن الناتج هو عدد كامل، فيكون ٥٠ هو الحد الثالث عشر في المُنتالية.

إذا كان العدد ١٢٨ حداً في المُنتالية، يجب أن تكون هناك قيمة صحيحة موجبة للرتبة ن حيث $4n - 2 = 128$ ؛

أكتب المعادلة بدلالة ن وذلك بإضافة ٢ إلى الطرفين.

اقسم الطرفين على ٤

$$4n - 2 = 128$$

$$4n = 130$$

$$n = \frac{130}{4} = 32,5$$

بما أن (ن) هي رتبة في المُنتالية، يجب أن يكون عدداً كاملاً، ولكن قيمة $n = 32,5$ ليست عدداً كاملاً وهذا يعني أن العدد ١٢٨ لا يمكن أن يكون عدداً في المُنتالية.

تمارين ١-٩-ب

(١) أوجد الحد النّوني، ثم الحد ١٥ لكلّ من المُنتاليات الآتية:

ب ٣ ، ٢٣ ، ١٨ ، ١٣ ، ٨ ، ٣ ، ...

أ ٥ ، ٧ ، ٥ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ...

د ٥ ، ٥ ، ٣,٥ ، ٢,٠,٥ ، ...

ج ٣ ، ٢١ ، ١٥ ، ٩ ، ٣ ، ...

ه ١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ...

ـ٤ ، ـ٢ ، ٥ ، ٨ ، ...

ز ٩ ، ١٩ ، ٢٩ ، ٣٩ ، ٤٩ ، ...

ـ٤ ، ـ٣٦ ، ـ٢٨ ، ـ٢٠ ، ـ١٢ ، ...

لحل معظم جزئيات هذا التمرين، يمكن الاستعانة بالخط الذي تم رسمه سابقاً في التمرين ١ من الدرس ١-٩-أ في الصفحة ٢٤١

(٢) في المُنتالية:

ـ٤ ، ـ١٢ ، ـ٢٠ ، ـ٢٨ ، ـ٣٦ ، ـ٤٤ ، ـ٥٢ ، ...

أ أوجد الحد العام.

ب أوجد الحد ذا الرتبة ٥٠٠

ج أي حد في المُنتالية قيمته ٩٢٣٦ ووضح خطوات الحل.

د أثبت أن العدد ١٥٤ ليس حداً في المُنتالية.

في أسئلة الحد العام، تذكّر أن (ن) يجب دائماً أن تكون عدداً صحيحاً موجباً.

(٣) أوجد ذهنياً الحد العام لكل مُتالية فيما يلي:

- أ** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- ب** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$
- ج** $\frac{9}{64}, \frac{49}{121}, \dots$
- د** $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \dots$

(٤) اكتب أول ثلاثة حدود، والحد العشرين، للمُتالية التي حدّها العام هو:

- أ** $ح_n = 4 - n$
- ب** $ح_n = 2 - n$
- ج** $ح_n = \frac{1}{2}n^2$
- د** $ح_n = n(n+1)(n-1)$
- هـ** $ح_n = \frac{3}{n+1}$
- وـ** $ح_n = 2n^2$

في التعبير $ح_n$ ، $ح$ هو الحد، n هي رتبة الحد.

(٥) أوجد قيمة s إذا كان $(s+1), (s+17)$ هما الحدين الثاني والسادس بالترتيب، في مُتالية أساسها هو العدد ٥

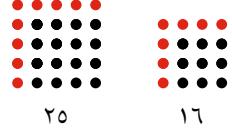
(٦) أوجد قيمة s إذا كان $(2s+2), (s-4)$ هما الحدين الثالث والسابع بالترتيب، في مُتالية أساسها هو العدد ٢

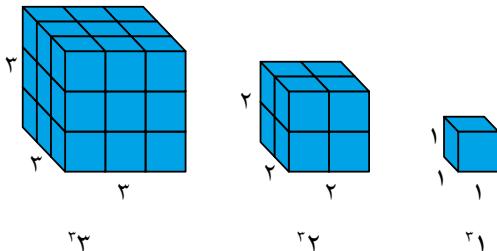
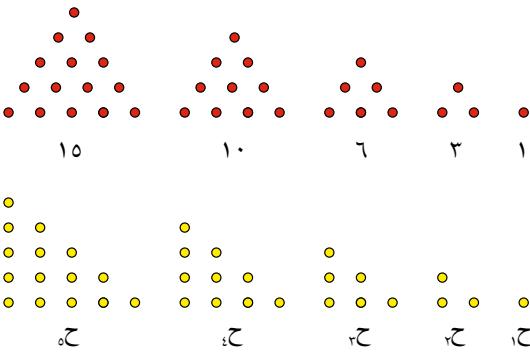
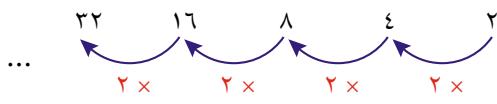
(٧) اكتب الحدود الثلاثة التالية في كل مُتالية فيما يلي:

- أ** ... ١٩ ١٥ ١١ ٧ ٣
- ب** ... ٣٦ ٢٥ ١٦ ٩ ٤
- ج** ... ٥ ٥ ١٣ ١٩ ٢٣

١-٩ ج بعض المُتاليات الخاصة

يجب أن تكون قادرًا على إدراك المُتاليات الآتية:

المُتالية	الوصف
مربعات الأعداد $ح_n = n^2$	<p>مربع العدد هو ناتج ضرب عدد كامل في نفسه.</p> <p>يمكن تمثيل الأعداد المربعة باستخدام نقاط نظمت لتشكل مربعات.</p>  <p>تشكل الأعداد المربعة مُتالية (غير مُنتهية): ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...</p> <p>يمكن استخدام الأعداد المربعة في تكوين مُتاليات أخرى: $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$</p> <p>(كل حد هو ضعف مربع عدد) ٢، ٨، ١٨، ٣٢، ٥٠، ...</p>

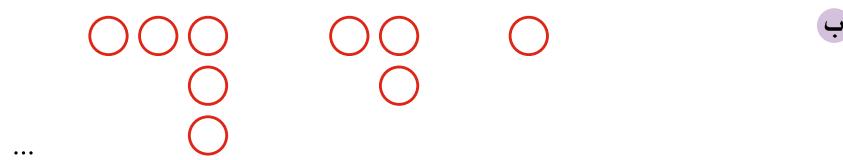
الوصف	المُتَتَالِيَّة
<p>مُكَعْبُ العَدْد هو نَاتِج ضَرِبِ عَدْد كَامِل فِي نَفْسِهِ، ثُمَّ ضَرِبِ النَّاتِج فِي العَدْد نَفْسِهِ مَرَّة أُخْرَى.</p>  <p>تُكَوَّن مُكَعْبَاتُ الْأَعْدَاد مُتَتَالِيَّة (غَيْر مُنْتَهِيَّة):</p> $\dots, 125, 64, 27, 8, 1$	<p>مُكَعْبَاتُ الْأَعْدَاد</p> $ح_n = n^3$
<p>تُكَوَّن الْأَعْدَاد المُثَلَّثَة مِنْ خَلَال تَنظِيمِ نَقَاطٍ لِتَشْكِيلِ مُثَلَّثَاتٍ مُطَابِقَةِ الْأَضْلاعِ، أَوْ مُثَلَّثَاتٍ قَائِمَةٍ مُطَابِقَةِ الْأَضْلاعِ. يُعْطِي كُلُّ التَّرْتِيبَيْنِ مُتَتَالِيَّةً الْأَعْدَاد نَفْسَهَا.</p>  <p>تُكَوَّن الْأَعْدَاد المُثَلَّثَة مُتَتَالِيَّة (غَيْر مُنْتَهِيَّة):</p> $\dots, 15, 10, 6, 3, 1$	<p>الْأَعْدَاد المُثَلَّثَة</p> $ح_n = \frac{1}{2}n(n+1)$
<p>ليوناردو فيبوناتشي رياضي إيطالي لاحظ أنَّ كثِيرًا مِنَ الْأَنْمَاطِ الطَّبِيعِيَّةِ تُكَوَّن مُتَتَالِيَّةً:</p> $\dots, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ <p>تُسَمَّى هَذِه الْأَعْدَاد الْأَعْدَاد فيبوناتشي. قَانُونُ الْحَدِّ إِلَى الْحَدِّ لِهَذِهِ الْأَعْدَاد هُوَ (اجْمَعِ الْعَدْدَيْنِ السَّابِقَيْنِ لِتَحْصِيلِ عَلَى الْحَدِّ التَّالِي مُبَشِّرَةً).</p>	<p>أَعْدَاد فيبوناتشي</p>
<p>تُسَمَّى الْمُتَتَالِيَّةُ، الَّتِي يُمْكِن عَرْضُهَا بِطَرِيقِ الْمُخْطَطِ لِحَدِودِهَا مِنْ خَلَالِ الضَّرِبِ أَوِ الْقِسْمَةِ، مُتَتَالِيَّةً أَسْسِيَّةً.</p>  <p>هَذِهِ هِي قَوْيُ الْعَدْدِ 2، أَيْ يُمْكِن كِتَابَةَ الْمُتَتَالِيَّةِ فِي صُورَةٍ 2^n (سُمِّيَّتِ الْمُتَتَالِيَّةِ بِالْمُتَتَالِيَّةِ الأَسْسِيَّةِ، لِأَنَّ n فِي هَذِهِ الْحَالَةِ تُمَثِّلُ أَسَّاً). $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{243}\right)$... الْحَدُّ الْعَامُ لِهَذِهِ الْمُتَتَالِيَّةِ هُوَ</p>	<p>الْمُتَتَالِيَّاتِ الْأَسْسِيَّةِ</p>

تمارين ١-٩ ج

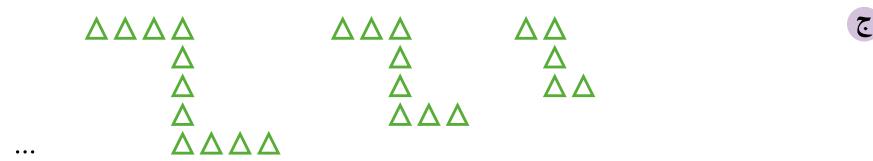
(١) أوجد الحد العام، ثم الحد 300 لكل من الممتاليات الآتية:



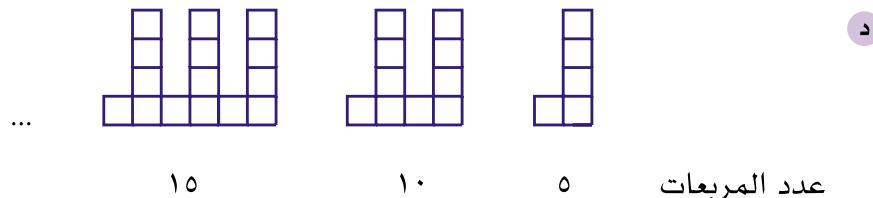
١٠ ٧ ٤ عدد العيدان



٥ ٢ ١ عدد الدوائر



١١ ٨ ٥ عدد المُثلثات



١٥ ١٠ ٥ عدد المربعات

٢-٩ المجموعات

٢-٩-١ مفاهيم عامة حول المجموعات

المجموعة هي قائمة أو تجمّع من الأشياء التي تشارك في إحدى الخواص. يمكن للأشياء في المجموعة أن تكون أي شيء: من الأعداد والحرروف والأشكال إلى الأسماء والأماكن؛ ولكنها في العادة تشارك فيما بينها.

توضع قائمة **العناصر** في المجموعة داخل حاصلتين { }.

أمثلة على المجموعات:

{١٠، ٨، ٦، ٤، ٢} : مجموعة كل الأعداد الصحيحة الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من ١١

عند كتابة المجموعات، لا تنسب كتابة الحاصلتين في كلا الطرفين.

{أ، و، ي} : مجموعة أحرف العلة في اللغة العربية.

{أحمر، أخضر، أزرق} : المجموعة التي تتضمّن الألوان الأحمر والأخضر والأزرق.

وتُستخدم عادة الحروف لتسمية المجموعات:

إذا كانت **أ** مجموعة الأعداد الأولية الأقل من ١٠، فإن **A** = {٧، ٥، ٣، ٢}

إذا كانت **B** مجموعة أحرف كلمة 'رياضيات'، فإن **B** = {ر، ي، ا، ض، ت}

تساوي مجموعتان إذا تضمنتا العناصر نفسها، حتى لو كان ترتيب العناصر مختلفاً. وعليه فإن:

{٤، ٣، ٢، ١} = {٤، ٢، ٣، ١} ، وهذا ...

لاحظ أن عناصر المجموعة لا تتكرّر.

يُكتب عدد العناصر في المجموعة على صورة **ع(F)**، حيث **F** اسم المجموعة. مثلاً،

تعرف المجموعة الخارجية بالمجموعة التي لا تحتوي أي عنصر.

تحتوي المجموعة **F** = {١، ٣، ٧، ٥، ٩} على خمسة عناصر، أي **ع(F) = ٥**

يمكن استخدام {} للدلالة على المجموعة الخارجية.

المجموعة التي لا تحتوي على عناصر تُسمى **المجموعة الخارجية**. يستخدم الرمز \emptyset أو {} لتمثيل المجموعة الخارجية، وتقرأ فاي.

يوجد رمز خاص يدل على المجموعة الخارجية، وقد أخذ هذا الرمز من الأبجدية الدانماركية والنرويجية، وهو الرمز (\emptyset) ويقرأ فاي.

الإعداد الفردية من مضاعفات العدد **٢** = \emptyset لعدم وجود أي عدد فرديٌّ من مضاعفات العدد **٢**

والآن، إذا كان **S** عنصراً في المجموعة **F**، فتُكتب: **S ⊂ F** وتقرأ **S** تنتهي إلى **F**.

يُستخدم الرمز \subset للدلالة على أن عنصراً ما ينتمي إلى مجموعة ما.

إذا لم تكن **S** عنصراً في المجموعة **F**، فتُكتب: **S ⊄ F** وتقرأ **S** لا تنتهي إلى **F**.

أي إن **S ⊂ F** يعني أن العنصر **S** ينتمي إلى المجموعة **F**.

مثلاً: إذا كان **U** = {أحمر، أخضر، أصفر، أسود}، فإن:

أحمر $\subset U$ في حين أن أبيض $\not\subset U$.

إذا علمنا أن **B** = {٢، ٣، ٥، ٧}، يمكننا القول أن **٥ ⊂ B** وأن **٦ ⊄ B**

تحتوي بعض المجموعات على عناصر يمكن عدّها، وتُعرف هذه المجموعات بالمجموعات المُنتهية، وعند عدم وجود نهاية لعدد عناصر المجموعة، تُسمى المجموعة بالمجموعة غير المُنتهية.

إذا كانت $M = \{ \text{الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من } 5 \}$ ، يكون $U(M) = 4$ ، وهي مجموعة مُنتهية.

إذا كانت $B = \{ \text{الأعداد الصحيحة الموجبة} \}$ ، تكون $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$ وهي مجموعة غير مُنتهية.

مُلخص

- تُكتب عناصر المجموعة داخل حاصلتين { }.
- \emptyset أو { } تعني المجموعة الخالية.
- $\exists U$ تعني أن \exists عُنصر في المجموعة U .
- $\nexists U$ تعني أن \nexists عُنصرًا في المجموعة U .
- $U(U)$ هي عدد عناصر المجموعة U .

تمارين ٢-٩

(١) اكتب جميع عناصر كل مجموعة فيما يلي:

- | | |
|-----------|--------------------------------|
| أ | {أيام الأسبوع} |
| ب | {شهور السنة الميلادية} |
| ج | {عوامل العدد ٣٦} |
| د | {ألوان قوس قزح} |
| هـ | {مضاعفات العدد ٧ الأصغر من ٥٠} |
| وـ | {الأعداد الأولية الأصغر من ٣٠} |
| زـ | {أحرف كلمة لعب} |

(٢) اكتب عُنصريْن إضافيَّيْن في كلّ مجموعة فيما يلي:

- | | |
|-----------|----------------------------------|
| أ | {أرنب، قط، كلب، ...} |
| بـ | {جزر، بطاطا، ملفوف، ...} |
| جـ | {لندين، باريس، مسقط، ...} |
| دـ | {النيل، الأمازون، دجلة، ...} |
| هـ | {شمندر، بقدونس، خس، ...} |
| زـ | {عُمان، السعودية، الإمارات، ...} |
| طـ | {قرنفل، ورد، جوري، ...} |
| يـ | {..., ٩، ٦، ٣} |
| كـ | {مصارع، ملاكم، عداء، ...} |
| لـ | {عطارد، الْزَّهْرَة، زُحل، ...} |
| مـ | {سعيد، حزين، غاضب، ...} |
| سـ | {سُداسي، سُباعي، مثلث، ...} |

١٢) صِف كل مجموعة فيما يلي وصفاً كاملاً:

- أ {١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...}
- ب {آسيا، أوروبا، أفريقيا، ...}
- ج {٨، ٦، ٤، ٢، ...}
- د {٢، ٤، ٦، ٨، ...}
- ه {١٢، ٦، ٤، ٣، ٢، ١}

٤) ضع علامة صح أو خطأ أمام كل عبارة فيما يلي:

- أ إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، فإن $3 \notin S$
- ب إذا كانت $F = \{\text{الأعداد الأولية الأصغر من العدد } 10\}$ ، فإن $\cup(F) = 4$
- ج إذا كانت $S = \{\text{أشكال رباعية منتظمة}\}$ ، فإن المربع $\in S$
- د إذا كانت $R = \{\text{الألوان الأساسية}\}$ ، فإن اللون الأصفر $\notin R$
- ه إذا كانت $K = \{\text{عدد مربع أصغر من العدد } 100\}$ ، فإن $64 \in K$

٢-٩ بـ المجموعة الشاملة

تتضمن المجموعات الآتية عدداً من العناصر المشتركة:

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ N &= \{1, 5, 9\} \\ G &= \{1, 4, 8, 21\} \end{aligned}$$

تشمل مجموعة الأعداد الكاملة المجموعات الثلاث السابقة، وهي مُتضمنة أيضاً في مجموعة الأعداد الصحيحة الأصغر من ٢٢

عند التعامل مع المجموعات، تكون هناك في العادة مجموعة (كُبرى) تحتوي على جميع المجموعات المعطاة، ويمكن أن تتغير هذه المجموعة وفقاً لطبيعة المسألة التي تُحاول حلّها.

وتكون جميع عناصر المجموعات M , N , G مُتضمنة في مجموعة الأعداد الكاملة، وهي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من العدد ٢٢

تسمى كلتا المجموعتين **المجموعة الشاملة**، وهي التي تحتوي على جميع عناصر المجموعات المعطاة. ويُستخدم الحرف S للدلالة على المجموعة الشاملة.

المجموعة المُتممة

مُتممة المجموعة M هي مجموعة جميع العناصر التي تتبع إلى المجموعة الشاملة S ولا تتبع إلى المجموعة M ويرمز لها بالرمز $\complement M$.

مثلاً، إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$F = \{2, 4\}$

فإن **مُتممة** F هي: $F' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ملخص

- تمثل S المجموعة الشاملة، وهي التي تحتوي على جميع العناصر.
- تمثل F' المجموعة المُتممة للمجموعة F ، وهي التي تحتوي على العناصر التي تتبع إلى المجموعة S ، ولا تتبع إلى المجموعة F

الاتحاد والتقاطع

اتحاد المجموعتين $F \cup B$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في المجموعتين. يُستخدم الرمز \cup للدلالة على الاتحاد، وعليه فإن اتحاد المجموعتين $F \cup B$ يكتب في صورة: $F \cup B$

تقاطع المجموعتين $F \cap B$ هو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين. يُستخدم الرمز \cap للدلالة على التقاطع، وعليه فإن تقاطع المجموعتين $F \cap B$ يكتب في صورة: $F \cap B$

مثلاً، إذا كانت $U = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ، $K = \{6, 10, 12, 14\}$ ، فإن:

$U \cap K =$ مجموعة العناصر المشتركة في المجموعتين $= \{6, 10\}$

$U \cup K = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

مساعدة

لاحظ أن اتحاد المجموعتين يُشبه جمع المجموعتين معاً. يجب أن تتنكر عدم تكرار العناصر داخل المجموعة.

المجموعات الجزئية

لتكن المجموعة J مجموعة كل الأشكال الرباعية، والمجموعة B مجموعة كل المستويات، والمستطيل نوع من أنواع الأشكال الرباعية، وهذا يعني أن كل عنصر من B هو عنصر أيضاً من J ، وعليه فإن B محتواها بالكامل في J . عندما يحدث ذلك، تُسمى B مجموعة **جزئية** من J ، وتكتب في صورة: $B \subseteq J$. إذا صادف أن تكون B مساوية لـ J ، تبقى أيضاً B مجموعة جزئية من J ، ولكن نستخدم الرمز \subsetneq وتكتب في صورة: $B \subsetneq J$ ، ويمكننا عكس الرموز بحيث تكون: $J \subseteq B$. وإذا لم تكن J مجموعة جزئية من B ، نكتب $J \not\subseteq B$.

لاحظ أن الرمز \subseteq له نهاية مفتوحة ونهاية مغلقة. تأتي المجموعة الجزئية من جهة النهاية المغلقة.

مُلْخَص

- \cap هو رمز الاتحاد.
- \cap هو رمز التقاطع.
- \subset يدل على أن A مجموعة جزئية من B .
- \supset يدل على أن B مجموعة جزئية من A وتساويها.
- $\not\subset$ يدل على أن B ليست مجموعة جزئية من A .

مثال ٦

إذا كانت $S = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $T = \{5, 8, 20, 24\}$.

(١) أوجد كلاً من المجموعتين:

$$\text{أ } S \cup T \quad \text{ب } S \cap T$$

(٢) هل صحيح أن $T \subset S$ ؟

الحل:

$S \cup T$ = مجموعة كل عناصر S أو T ، أو كليهما بدون تكرار.

$S \cap T$ = مجموعة كل العناصر التي تظهر في كل من S و T معاً.

$$(1) \quad \text{أ } S \cup T = \{4, 5, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$$

$$\text{ب } S \cap T = \{8, 20, 24\}$$

إذن، فإنه ليس صحيحاً القول إن كل عنصر في المجموعة T هو عنصر أيضاً في المجموعة S .

(٢) لاحظ أن $5 \in T$ ولكن $5 \notin S$ لذا فإن $T \not\subset S$.

تمارين ٢-٩-ب

(١) إذا علمت أن: $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 6, 8\}$, $D = \{10, 8, 6, 4, 2\}$.

أ اكتب عناصر:

$$(1) B \cap C$$

ب يوجد:

$$(2) D \cap (B \cap C)$$

يمكن عكس الاتحاد والتقاطع
بدون تغيير عناصرهما. مثلاً
 $B \cap C = C \cap B$,
 $B \cap C = C \cap B$

(٢) إذا علمت أن: $M = \{A, B, C, H, Y, S, U\}$, $N = \{A, C, Y, F, S, U\}$.

أ اكتب عناصر:

$$(1) M \cap N$$

ب هل H عُنصر في $M \cap N$? وضح إجابتك.

ج هل J ليس عُنصراً في $M \cap N$? وضح إجابتك.

(٣) إذا علمت أن: $F = \{\text{مُثلثات مُتطابقة الأضلاع}\}$, $S = \{\text{مُثلثات مُتطابقة الضلعين}\}$

أ وضح أن $F \subseteq S$.

ب ماذا تمثل المجموعة $F \cap S$ ؟

(٤) إذا علمت أن: $T = \{1, 2, 3, 7, 6, 10\}$, $S = \{1, 3, 2, 9, 10\}$.

أ اكتب عناصر كل من المجموعتين الآتيتين:

$$(1) T \cap S$$

ب هل صحيح أن $5 \notin T$ ؟

(٥) إذا كانت $M = \{\text{أرنب، قطة، كلب، بقرة، سلحفاة، فأر، حروف}\}$,

$L = \{\text{أرنب، بقرة، فأر}\}$, $N = \{\text{قط، كلب}\}$:

أ اكتب عناصر المجموعة L'

ب اكتب عناصر المجموعة N'

ج اكتب عناصر المجموعة $L' \cap N'$

د ماذا تمثل المجموعة $L \cap N$ ؟

هـ أوجد المجموعة (L')

و ماذا تمثل المجموعة $L \cup L'$ ؟

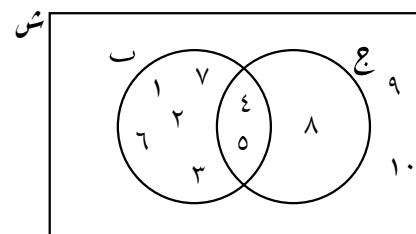
٢-٩ ج مخطط قن

لاحظا

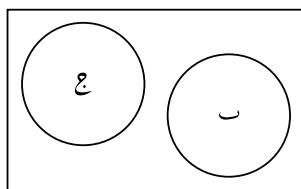
بدأ عالم الرياضيات جون فن عام ١٨٨٠م باستخدام الدوائر المُتداخلة لتوضيح العلاقات بين المجموعات، وتعرف تلك المخططات بـ **مخططات قن**.

ستستخدم مخطط قن عند دراستك لموضوع الاحتمالات.

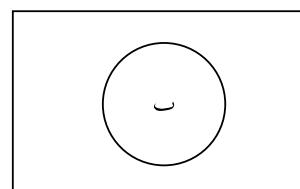
مثلاً، إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ، $B = \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ، فإن مخطط قن سيظهر كما في الشكل الآتي:



لاحظ أن المجموعة الشاملة معروضة في مستطيل، وأن أي مجموعة ضمن المجموعة الشاملة معروضة في دائرة، كما أن تقاطع المجموعتين $A \cap B$ موجود في تداخل الدائريتين. إليك بعض الأمثلة على مخططات قن، حيث يتم تظليل بعض المناطق لتمثيلمجموعات محددة:



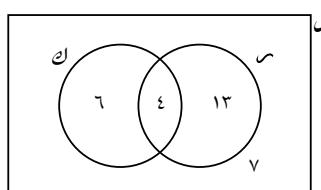
المجموعتان A ، B مُتباعدتان، أي ليس بينهما عناصر مشتركة.



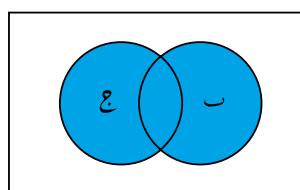
تمثل الدائرة المجموعة B .



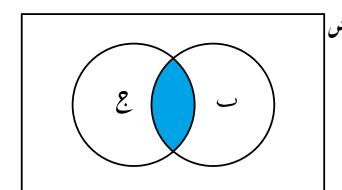
يُمثل المستطيل المجموعة الشاملة S .



يمكن أيضاً استخدام مخططات قن لتوضيح عدد العناصر $|A \cap B|$ في المجموعة B . في الرسم أعلاه: $S = \{\text{عدد طلاب الذين يدرسون الفيزياء}\}$

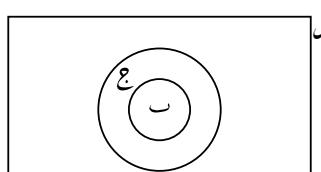


تمثل المجموعة $A \cap B$ بالمنطقة المظللة.

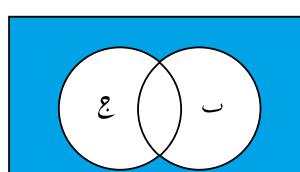


تمثل المجموعة $A \cap B$ بالمنطقة المظللة.

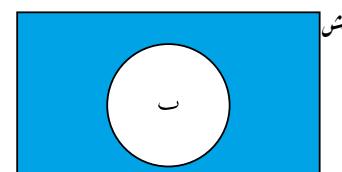
$L = \{\text{عدد طلاب الذين يدرسون الكيمياء}\}$



$B \cap A^c$



تمثل $(B \cap A^c)$ ، المجموعة المُتممة للمجموعة $B \cap A$ ، بالمنطقة المظللة.



تمثل B^c ، المجموعة المُتممة للمجموعة B ، بالمنطقة المظللة.

مثال ٧

لديك المجموعات الآتية:

$$\text{ن} = \{\text{أ، ب، ج، د، ه، و، ز، ح، ط، ي، ك}\}$$

$$\text{ل} = \{\text{أ، ج، ه، ح، ي}\}$$

$$\text{م} = \{\text{أ، ب، د، ز، ح}\}$$

أ مثل هذه المجموعات بمخطط فن.

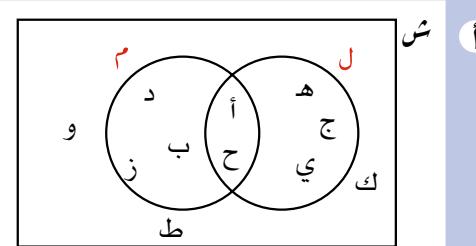
ب اكتب عناصر المجموعة $\text{L} \cap \text{M}$.

ج أوجد $U(L \cap M)$.

د اكتب عناصر المجموعة $\text{L} \cup \text{M}$.

هـ أوجد $U(L \cup M)$.

و اكتب عناصر المجموعة $\text{L} \cap \text{M}'$.

الحل:

أ ن

انظر إلى منطقة تقاطع الدائريتين.

$$\text{ب} \quad \text{L} \cap \text{M} = \{\text{أ، ح}\}$$

يوجد عنصران في $\text{L} \cap \text{M}$.

$$\text{ج} \quad \text{U}(\text{L} \cap \text{M}) = 2$$

$\text{L} \cup \text{M}$ = مجموعة عناصر L ، M أو كلتيهما.

$$\text{د} \quad \text{L} \cup \text{M} = \{\text{أ، ب، ج، د، ه، ز، ح، ي}\}$$

يوجد ٨ عناصر في $\text{L} \cup \text{M}$.

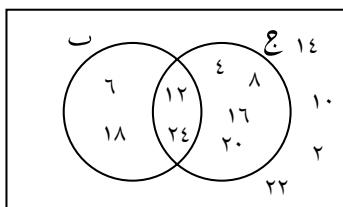
$$\text{هـ} \quad \text{U}(\text{L} \cup \text{M}) = 8$$

$\text{L} \cap \text{M}'$ = مجموعة كل العناصر التي تنتهي إلى المجموعة L ولا تنتهي إلى المجموعة M .

$$\text{و} \quad \text{L} \cap \text{M}' = \{\text{ج، ه، ي}\}$$

تمارين ٢-٩-ج

(١) استخدم مخطط فن المقابل للإجابة عن الأسئلة الآتية:

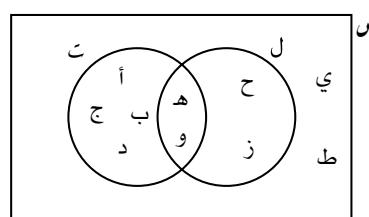


أ اكتب عناصر المجموعتين ب، ع

ب اكتب عناصر ب ∩ ع

ج اكتب عناصر ب ∪ ع

(٢) استخدم مخطط فن المقابل للإجابة عن الأسئلة الآتية:



أ اكتب العناصر التي تتبع إلى:

(١) المجموعة ش (٢) المجموعة ل

ب اكتب العناصر التي تتبع إلى كلتا المجموعتين ش، ل

ج اكتب العناصر التي:

(١) لا تتبع إلى المجموعة ش، ولا تتبع إلى المجموعة ل

(٢) تتبع إلى المجموعة ش، ولا تتبع إلى المجموعة ل

(٣) ارسم مخطط فن لعرض المجموعات الآتية، وابحث كل عنصر في مكانه المناسب:

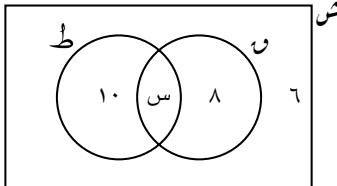
أ المجموعة الشاملة هي {أ، ب، ج، د، ه، و، ز، ح}

م = {ب، ج، و، ز}، ن = {أ، ب، ج، د، و}

ش = {الأعداد الصحيحة من ٢٠ إلى ٣٦}

م = {مضاعفات العدد ٤}، ط = {الأعداد الأكبر من العدد ٢٩}

(٤) يعرض مخطط فن المقابل أعداد الطلاب في أحد الصفوف والتي تمثل المجموعات التالية:



المجموعة الشاملة هي: {عدد طلاب أحد الصفوف}.

ط = {الطلاب الذين يفضلون الكرة الطائرة}

ن = {الطلاب الذين يفضلون كرة القدم}

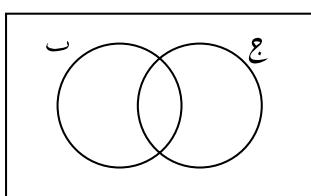
علمًا بأنه يوجد ٣٠ طالبًا في الصف.

أ وجد قيمة س.

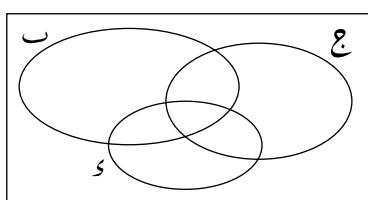
ب ما عدد الطلاب في الصف، الذين يفضلون الكرة الطائرة؟

ج كم طالبًا في الصف لا يلعب كرة القدم؟

(٥) انسخ مخطط فن المقابل، وظلل المنطقة التي تمثل المجموعة ب ∩ ع.



٦) ارسم ٧ نسخ من مخطط فن المقابل، وظلل الممناطق التي تمثل المجموعات الآتية:



- أ ب ع
- ب ب ع ب ع
- ج ب ع'
- د ب ع (ع ب ع)
- ه (ب ع) ب ع
- ز (ب ع) ب (ب ع)
- و (ب ع) ب ع

٧) صف فيه ٣٠ طالباً، ٢٢ طالباً منهم يفضلون القصص التاريخية، و١٢ طالباً يفضلون القصص الأدبية، و٥ طلاب لا يفضلون أيهما. استخدم مخطط فن لتجد عدد الطلاب الذين يفضلون القصص التاريخية والقصص الأدبية معاً.

٤-٤-٤ صيغة الصفة المميزة

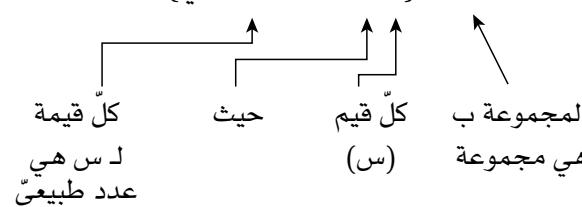
لقد تعرفت أنه يمكننا أن نعرض المجموعة في صورة قائمة من العناصر، أو من خلال وصفها باستخدام قاعدة (بالكلمات) ليتبين ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى المجموعة أو لا. يمكننا أيضاً وصف المجموعات باستخدام **صيغة الصفة المميزة**، حيث تُعد صيغة الصفة المميزة طريقة لوصف عناصر المجموعة باستخدام الخصائص التي يمتلكها كل عنصر.

مثلاً:

$$B = \{s : s \text{ عدد طبيعي}\}$$

هذا يعني:

$$B = \{s : s \text{ عدد طبيعي}\}$$



بمعنى آخر، المجموعة $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

قد تتضمن صيغة الصفة المميزة للمجموعة قيداً مختلفاً:

مثلاً، $B = \{s : s \text{ حرف من حروف الأبجدية العربية، } s \text{ حرف علة}\}$
في هذه الحالة، $B = \{\text{أ، و، ي}\}$.

إليك مثال آخر:

$\{ج : ج \text{ عدد صحيح أكبر من صفر وأصغر من } 20\}$

تُكتب هذه المجموعة في صيغة الصفة المميزة على نحو:

$\{ج : ج = \{س : س \text{ عدد صحيح، } 0 < س < 20\}\}$

وتُقرأ: $ج$ هي مجموعة كل قيم $س$, حيث $س$ عدد صحيح, $س$ أكبر من صفر وأصغر من 20 العدد

ستُساعدك الأمثلة الآتية لتألف الطريقة التي تُستخدم فيها صيغة الصفة المميزة وكيفية قراءتها.

مثال ٨

اكتب عناصر المجموعة $ج$, حيث $ج = \{س : س \in \text{الأعداد الأولية، } 10 < س < 20\}$

الحل:

نقرأ: 'المجموعة $ج$ هي مجموعة كل قيم $س$, حيث $س$ عدد أولي, $س$ أكبر من العدد 10 وأصغر من العدد 20 '
 الأعداد الأولية الأكبر من العدد 10 والأصغر من العدد 20 هي $11, 13, 17, 19$

مثال ٩

اكتب المجموعة الآتية في صيغة الصفة المميزة:

$ج = \{\text{المثلثات القائمة الزاوية}\}$

الحل:

إذا كانت $ج$ مجموعة كل المثلثات القائمة الزاوية, فإن $ج$ هي كل قيم $س$, حيث $س$ مثلث قائم زاوية.

$\therefore ج = \{س : س \text{ مثلث قائم زاوية}\}$

كما تلاحظ من المثال الأخير, قد تدفعك صيغة الصفة المميزة للمجموعة أحياناً إلى الكتابة أكثر, ولكن ذلك لا يصح دائماً.

تمارين ٢-٩ د

(١) اكتب كلاً من المجموعات الآتية باستخدام صيغة الصفة المميزة:

- أ الأعداد المُرِبَّعة الأصغر من ١٠١
- ب أيام الأسبوع.
- ج الأعداد الصحيحة الأصغر من الصفر.
- د كل الأعداد الصحيحة الواقعة بين العددان ٢، ١٠
- ه أشهر السنة الميلادية التي تتضمن ٣٠ يوماً.

(٢) اكتب كلاً من المجموعات الآتية مستخدماً الصفة المميزة:

- أ {٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢}
- ب {أ، و، ي}
- ج {ع، ب، د، أ، ل، ر، ح، ي، م}
- د {٢٠، ١٨، ١٦، ١٤، ١٢، ١٠، ٨، ٦، ٤، ٢}
- ه {٣٦، ١٨، ١٢، ٩، ٦، ٤، ٢، ١}

(٣) اكتب عناصر كل مجموعة من المجموعات الآتية:

- أ {س: س عدد صحيح، $40 > s > 50$ }
- ب {س: س مُضلَّع منتظم، وعدد أضلاع س لا يزيد عن ستة أضلاع}
- ج {س: س من مُضاعفات العدد ٣، $16 < s < 22$ }

(٤) صِف كُلّ مجموعة فيما يلي بالكلمات، وادْكُر لِمَاذَا لا يمكن كتابة جميع عناصرها:

$$\text{أ } b = \{(s, c) : c = 2s + 4\} \quad \text{ب } j = \{s : s \text{ عدد سالب}\}$$

(٥) إذا كانت $b = \{s : s \text{ مُضاعف من مُضاعفات العدد } 3\}$ ، $j = \{c : c \text{ مُضاعف من مُضاعفات العدد } 5\}$ ، اكتب $b \cap j$ مستخدماً صيغة الصفة المميزة.

$$\text{ش} = \{c : c \text{ عدد موجب، } c \text{ عدد صحيح أصغر من } 18\}$$

$$b = \{d : d < 5, d \in \mathbb{Z}\}, j = \{s : s \geq 5, s \in \mathbb{Z}\}$$

أ اكتب عناصر كل مجموعة فيما يلي:

$$(1) b \cap j \quad (2) b' \quad (3) b' \cap j \quad (4) b \cap j' \quad (5) (b \cap j)'$$

ب ماذا تمثل المجموعة $b \cap j$ ؟

ج اكتب عناصر المجموعة في الجُزئية (ب).

تكون صيغة الصفة المميزة مفيدة جدًا عندما لا يكون ممكناً ذكر جميع عناصر المجموعة، لأن المجموعة غير منتهية؛ ومثال ذلك: كل الأعداد الأصغر من ٣ أو كل الأعداد الكاملة الأكبر من

١٠٠

مُلْخَص

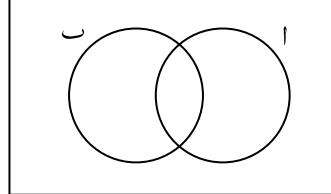
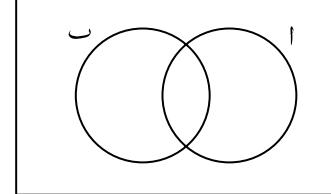
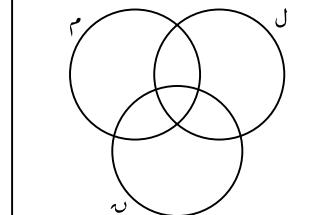
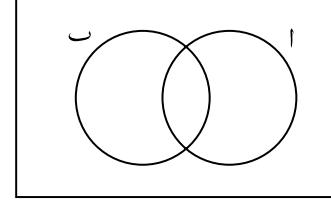
يجب أن تكون قادرًا على:

- استكمال مُتتالية.
- وصف صيغة لاستكمال مُتتالية.
- إيجاد الحد النوني (الحد العام) لمُتتالية.
- استخدام الحد النوني لإيجاد حدود مُتتالية ما.
- تحديد إن كان عدد مُعين حداً في مُتتالية أو لا.
- إنشاء مُتتاليات من أنماط الأشكال الهندسية.
- إيجاد صيغة لعدد الأشكال المستخدمة في متتالية ما.
- وصف مجموعة باستخدام الكلمات.
- إيجاد مُتممة مجموعة.
- إيجاد اتحاد مجموعتين وتقاطعهما.
- تمثيل عناصر مجموعة ما باستخدام مُخطط فن.
- حل المسائل باستخدام مُخطط فن.
- وصف مجموعة باستخدام صيغة الصفة المُميزة.

ما يجب أن تعرفه:

- **المُتتالية** هي مجموعة من العناصر دُونت بترتيب مُعيّن، مع وجود صيغة تربط بينها.
- **الحد** هو قيمة (عنصر) في المُتتالية.
- إذا كانت رُتبة الحد في المُتتالية هي الحرف n ، يمكن إيجاد قانون للحصول على الحد النوني (الحد العام).
- المجموعة هي قائمة أو تجمّع من الأشياء (العناصر) التي تشارك في إحدى الخواص.
- **العنصر** هو عضو في المجموعة.
- **تُسمى** المجموعة، التي لا تحتوي على أية عناصر، بالمجموعة الخالية (\emptyset).
- تحتوي المجموعة الشاملة (S) على جميع العناصر الممكنة والمناسبة في مسألة مُعينة.
- **مُتممة** المجموعة هي العناصر التي تتبع إلى المجموعة الشاملة S ولا تتبع إلى المجموعة.
- يمكن ضم عناصر مجموعتين (دون تكرار)، لتشكيل اتحاد المجموعتين (U).
- **تُسمى** المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين مجموعتين، بقطاع المجموعتين (C).
- **تُسمى** عناصر المجموعة **الجزئية** الموجودة جميعها ضمن مجموعة أوسع بالمجموعة **الجزئية** (C).
- **مُخطط فن** هو أسلوب تصويري لعرض المجموعات.
- **تُسمى** الطريقة **المختصرة** لوصف عناصر المجموعة بصيغة الصفة المميزة.

تمارين نهاية الوحدة

- ١) إذا كان الحد العام لمُتتالية هو $2n - 1$ ، اكتب أول عشرة حدود فيها.
- ب) إذا كان الحد العام لمُتتالية أخرى هو $3n - 2$ ، اكتب أول عشرة حدود فيها.
- ج) اكتب الحدود المشتركة بين المُتتاليتين في الجُزئيَّتين أ، ب
- د) اكتب الحد العام للمُتتالية الجديدة التي ظهرت في الجُزئيَّة ج.
- ٢) الحدود الخمسة الأولى في مُتتالية هي: ٦، ١٠، ١٤، ١٨، ٢٢. اكتب حدها العام.
- ب) إذا كان الحد لمُتتالية أخرى هو $an + 13$ ، اكتب أول خمسة حدود فيها.
- ج) هل يوجد حدود مشتركة بين المُتتاليتين أ، ب. كيف تفسِّر ذلك؟
- ٣) إذا كان الحد العام في مُتتالية هو $5n - 2$
اكتب أول أربعة حدود في المُتتالية.
- ٤) فيما يلي أول أربعة حدود في مُتتالية أخرى:
١، ٣، ٧، ١١
اكتب الحد العام لهذه المُتتالية.
- ٥) انسخ مُخطَّط فن، وظلل المنطقة المطلوبة في كل ممًا يلي:
- ب ش
- 
- أ ش
- 
- أ ب
- ٦) انسخ مُخطَّط فن، وظلل المنطقة المطلوبة في كل ممًا يلي:
- ب ش
- 
- أ ش
- 
- (أ ب) (أ ب)

مصطلاحات علمية

التقاطع Intersection: في المجموعات، هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين أو أكثر، يستخدم الرمز \cap للدلالة على التقاطع. في الجبر، هو نقطة التقاء مستقيميَن. (ص ٢٥١)

التقدير Estimate: حلٌّ تقريري لعملية حسابية تم إيجاد ناتجها باستخدام القيم التقريرية. (ص ١٣٤)

التكبير Enlargement: حركة الشكل الأصلي بحيث تبقى نسبة الأضلاع المُتَبَاهِرَة نفسها، ولكن أطوال الأضلاع تتزايد أو تتناقص، وينتج تشابهُ الشكل الأصلي مع صورته. (ص ٢١٣)

التماثل Symmetry: الحصول على الشكل نفسه بموقع مختلف، إما من خلال الانعكاس حول محور، أو الدوران حول نقطة. (ص ٢٠٦)

التماثل حول محور Line of symmetry: مستقيم يقسم شكل ثائي الأبعاد ليتطابق أحد النصفين تماماً مع النصف الآخر. (ص ٢٠٦)

التماثل حول مستوى Plane symmetry: مُسْطَح مُسْتَوٍ يقسم مجسمًا ثلاثيًّا الأبعاد ليتطابق أحد النصفين تماماً مع النصف الآخر. (ص ٢١٠)

التماثل الدوراني Rotational symmetry: التماثل بدوران الشكل حول نقطة ثابتة، بحيث يتتطابق مع نفسه تماماً في عدة مواقع خلال الدوران. (ص ٢١٢)

التوازي Parallel: توازي مستقيميَن يعني أنهما لا يتقاطعان أبداً. وتكون المسافة الأقصر بين مستقيميَن متوازيَيْن هي نفسها دائِمًا. (ص ٩٨)

ث

الثابت Constant: هو الحد الوارد في المعادلة الخطية، وهو عبارة عن عدد، ويشير بيانياً إلى الجزء المقطوع من محور الصادات. (ص ١٨٨)

أ

الاتحاد Union: مجموعة كل العناصر الموجودة في مجموعتين أو أكثر، يستخدم الرمز \cup للدلالة على الاتحاد. (ص ٢٥١)

الأسس/ الأساس indices: كلمة أخرى للقوى، وتعني عدد المرات التي يتم فيها ضرب الأساس في نفسه. (ص ٨٤)

الأساس Base: العدد المضرب في نفسه عدة مرات وفقاً للأسس. (ص ٨٤)

الأعداد الموجَّهة Directed numbers: الأعداد التي لها اتجاهات، عندما يكون أحد الاتجاهين موجباً، يكون الاتجاه المعاكس له سالباً. مثلاً، -4° س هو عدد موجَّه. (ص ٣٠)

الانسحاب Translation: حركة الشكل الأصلي مسافة محددة، وباتجاه محدد، على طول خطٍّ مستقيم. (ص ٢٢٢)

الانعكاس Reflection: صورة مرآة للشكل، بحيث تبعد النقاط الواقعية على الشكل الأصلي وصورها المسافة نفسها عن محور الانعكاس. (ص ٢١٤)

ب

البسط Numerator: العدد العُلُوي في الكسر. (ص ٤٣)

التحليل إلى عوامل Factorise/Factorisation: إعادة كتابة العبارة الجبرية باستخدام الأقواس. (ص ١٤٨)

التحويل الهندسي Transformation: تغيير في موقع وأبعاد نقطة أو مستقيم أو شكل، باتباع قاعدة مُعطاة. (ص ٢١٣)

التعامد Perpendicular: عندما يتقاطع شعاعان أو مستقيمان ويشكلان زاوية قائمة، فإن كلاً منها يكون متعامداً مع الآخر. (ص ٩٨)

التعويض Substitution: استبدال حرف بعدد في صيغة أو عبارة جبرية. (ص ٧٠)

الدورة الكاملة Revolution: دورة قياسها 360° (ص ٩٩)

ج

الجبر Algebra: استخدام الحروف والرموز الأخرى لكتابه معلومات رياضية. (ص ٦٩)

الجذر التربيعي Square root: الجذر التربيعي لعدد هو العدد الذي تم ضربه في نفسه للحصول على مربع العدد. (ص ٢٦)

الجذر التكعيبى Cube root: الجذر التكعيبى لعدد هو العدد الذي تم ضربه في نفسه ثم ضرب الناتج في العدد الأصلي مرة أخرى للحصول على مكعب العدد. (ص ٢٦)
الجزء المقطوع من المحور السيني X-intercept: النقطة التي يقطع فيها مستقيم أو منحنى المحور السيني. (ص ١٩٦)

الجزء المقطوع من المحور الصادي Y-intercept: النقطة التي يقطع فيها مستقيم المحور الصادي، ويساوي الحد الثابت في المعادلة. (ص ١٨٨)

ح

الحد Term: جزء من العبارة الجبرية أو الأعداد والحوروف والأشياء المنفردة في المتتالية. (ص ٧٠)

الحد الأدنى Lower bound: أصغر قيمة حقيقية يمكن أن يصل إليها عدد ما (بحسب درجة الدقة المطلقة). (ص ١٣٦)

الحد الأعلى Upper bound: أكبر قيمة حقيقية يمكن أن يصل إليها عدد ما (بحسب درجة الدقة المطلقة). (ص ١٣٦)

الحد التوسي/ الحد العام nth term rule: هو القاعدة التي تُعطى كل حد بحسب رتبته. (ص ٢٤١)

د

الدائرة Circle: مجموعة من النقاط المستوية التي تبعد مسافة واحدة (نصف القطر) عن نقطة ثابتة مطلقة (المركز). (ص ٩٦)

الدوران Rotation: حركة الشكل، دائرياً، حول نقطة ثابتة بزاوية دوران معلومة. (ص ٢١٣)

رتبة التمايز الدوراني Order of rotational symmetry: عدد مرات تطابق الشكل مع نفسه خلال دورة كاملة.

(ص ٢٠٧)

الرمز Symbol: طريقة مختصرة لكتابة المعلومات الرياضية مثل $=$ الذي يعني المساواة. (ص ١٧)

ز

الزاوية Angle: تتشكل الزاوية عند اتحاد شعاعين أو خطين مُستقيمين في نقطة واحدة. (ص ٩٨)

الزوايا المُتبادلتان Alternate angles: زوايا تساند متساوياً تتشكلان عندما يقطع قاطع خطين مُستقيمين متوازيين وتقع على جهتين مختلفتين من القاطع ومن المستقيمين المتوازيين. (ص ١٠٦)

الزوايا المُتحالفتان Co-interior angles: زوايا تساند تتشكلان عندما يقطع قاطع خطين مُستقيمين متوازيين. تكون الزوايا المُتحالفتان متكاملتين (مجموع قياسيهما 180°) وتقعان في جهة واحدة من القاطع. (ص ١٠٦)

الزوايا المُتناظرتان Corresponding angles: زوايا تساند متساوياً تتشكلان عندما يقطع قاطع خطين مُستقيمين متوازيين وتقعان على نفس الجهة من المستقيم القاطع ومن المستقيمين المتوازيين. كذلك تظهر الزوايا المُتناظرة في المثلثات المُتطابقة والمُتشابهة والأشكال المُتشابهة. (ص ١٠٦)

الزوايا المُتقابلات بالرأس Vertically opposite angles: زوايا تساند متساوياً في القياس، تتشكلان عندما يتقاطع خطان مُستقيمان وهما مشتركتان في الرأس والضلعين، وتكونان مُتقابلتين في الاتجاه. (ص ١٠٤)

الزاوية الحادة Acute angle: زاوية قياسها $< 90^\circ$ (ص ٩٩)

الزاوية الخارجية Exterior angle: الزاوية التي تتشكل من ضلع في مضلع وامتداد ضلع مجاور له. (ص ١١٨)

العامل الأولي Prime factor: عدد أولي يقبل القسمة على عدد آخر بدون باقٍ. (ص ٢٠)

العامل المشترك Common factor: حد يمكن قسمة حدّين أو أكثر عليه بدون باقٍ. (ص ١٤٨)

العبارة Expression: هي مجموعة من الحدود المرتبطة بإشارات العمليات الحسابية. (ص ٧٠)

العدد الأولي Prime number: عدد كامل أكبر من ١، وله عاملان فقط: العدد نفسه و ١ (ص ١٦)

العدد الحقيقي Real number: تشمل الأعداد الحقيقية الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية. (ص ١٦)

العدد الصحيح Integer: تشمل الأعداد الصحيحة الأعداد الكاملة الموجبة والسلبية والصفر. (ص ١٦)

العدد الطبيعي Natural number: الأعداد الطبيعية هي الأعداد الكاملة من ١ إلى ما لا نهاية. (ص ١٦)

العدد العشري الدوري Recurring decimal: عدد عشري يستمر فيه أي جزء من الجزء العشري دون توقف، ولكن يكرر نفسه بفترات مُنتظمة. (ص ٦٢)

العدد العشري المُنهي Terminating decimal: عدد عشري لا يستمر فيه أي جزء من الجزء العشري، بل يتوقف. (ص ٦٢)

العدد غير الأولي Composite numbers: عدد صحيح له أكثر من عاملين، أي أن له أكثر من العاملين ١ ونفسه. (ص ١٩)

العدد الكسري Mixed number: عدد يتضمن جزءاً كاملاً وجزءاً كسرياً. (ص ٤٥)

العدد النسبي Rational number: عدد يمكن التعبير عنه في صورة كسر، بسطه ومقameه عددان صحيحان، ومقameه لا يساوي الصفر. (ص ٦٢)

العنصر Element: عضو في المجموعة. (ص ٢٤٨)

الزاوية الداخلية Interior angle: زاوية داخل مضلع. (ص ١١٨)

الزاوية القائمة Right angle: زاوية قياسها 90° بالضبط. (ص ٩٩)

الزاوية المحيطية Inscribed angle: زاوية رأسها يقع على محيط الدائرة. (ص ٩٦)

الزاوية المركزية Central angle: زاوية رأسها يقع على مركز الدائرة. (ص ٩٦)

الزاوية المستقيمة Straight angle: زاوية قياسها 180° (ص ٩٩)

الزاوية المُنعدسة Reflex angle: زاوية قياسها $180^\circ < \text{س} < 360^\circ$ (ص ٩٩)

الزاوية المُنفرجة Obtuse angle: زاوية قياسها $90^\circ < \text{س} < 180^\circ$ (ص ٩٩)

ش

الشكل الرياضي Quadrilateral: مضلع له أربعة أضلاع. (ص ١٢٢)

ص

الصورة Image: الموقع الجديد لنقطة أو شكل هندسي بعد تنفيذ تحويل هندسي. (ص ٢١٣)

الصيغة Formula: قاعدة عامة تربط بين المتغيرات جبرياً (مثل كيفية إيجاد مساحة شكل هندسي). (ص ٧٠)

صيغة الصفة المميزة Set builder notation: طريقة لوصف عناصر المجموعة باستخدام الخصائص التي يمتلكها كل عنصر، دون الاضطرار إلى ذكرها جميعاً. (ص ٢٥٧)

الصيغة العلمية Scientific notation: طريقة قصيرة للتعبير عن الأعداد الصغيرة جداً والكبيرة جداً. (ص ٥٤)

ع

العامل Factor: عدد يقسم عدداً آخر بدون باقٍ. (ص ١٦)

الكسر المكافئ Equivalent fraction: هو كسر يتشكل عند ضرب أو قسمة البسط والمقام لكسر ما على عدد (غير الصفر). (ص ٤٣)

M

المثلث Triangle: مطلع له ثلاثة أضلاع. (ص ١١٧)
المجموعة Set: هي قائمة أو تجمّع من الأشياء التي تشارك في إحدى الخصائص. (ص ٢٤٨)

المجموعة الجزئية Subset: مجموعة عناصرها موجودة في مجموعة أخرى (أكبر عادة). (ص ٢٥١)

المجموعة الخالية Empty set: المجموعة التي لا تحتوي على عناصر. (ص ٢٤٨)

المجموعة الشاملة Universal set: المجموعة التي تحتوي على جميع عناصر المجموعات المعطاة. (ص ٢٥٠)

المجموعة المتممة Complement: هي مجموعة جميع العناصر التي تتبع إلى المجموعة الشاملة، ولا تتبع إلى المجموعة المعطاة. (ص ٢٥١)

المُتباينية Inequality: عدم تساوي بين مقدارين. مثل س < ٦ (ص ١٧٢)

المُتتالية Sequence: قائمة مرتبة من الأعداد أو الحروف أو الأشياء التي دُوِّنت بترتيب معين، مع وجود روابط بينها. (ص ٢٤٠)

المُتجه Vector: كمية لها اتجاه وطول. (ص ٢٢٢)

المُتغير Variable: حرف في الصيغة أو المعادلة له قيمة مختلفة. (ص ٧٠)

المُتماثل Symmetrical: شكل له خاصية التماثل. (ص ٢٠٦)

محور التماثل Axis of symmetry: مستقيم يقسم شكل ثالثي الأبعاد إلى نصفين أو عصا في مجسم يدور حولها ويظهر بنفس المظاهر عند نقاط مختلفة خلال دورانه. (ص ٢١٢)

F

فك الأقواس Expand/ expansion: ضرب كل عدد أو متغير خارج القوسين في جميع الحدود داخل القوسين. (ص ٨٠)

C

قانون الحد إلى الحد Term-to-term rule: قانون يعطي الحد التالي في المتتالية. (ص ٢٤٠)

القطاع Sector: جزء من الدائرة يتحدد بنصف قطررين والقوس المحصور بينهما. (ص ٩٦)

القطر Diameter: قطعة مستقيمة يقع طرفاها على محيط الدائرة وتمرّ بمركز الدائرة. (ص ٩٦)

القطعة الصغرى Minor segment: جزء من الدائرة يقع بين وتر وقوس في الدائرة قياسه أصغر من نصف الدائرة. (ص ٩٦)

القطعة الكبيرة Major segment: جزء من الدائرة يقع بين وتر وقوس في الدائرة قياسه أكبر من نصف الدائرة. (ص ٩٦)

القطعة المستقيمة Line segment: الجزء من المستقيم الذي يصل بين نقطتين عليه. (ص ١٩٩)

القوى Powers: تعبير آخر عن 'الأس' يعني عدد المرات التي يتم فيها ضرب الأساس في نفسه. (ص ٨٤)

القوس Arc: جزء من محيط الدائرة. (ص ٩٦)

K

الكسر Fraction: هو جزء من الكل. (ص ٤٣)

الكسر الاعتيادي Vulgar fraction: كسر بسطه أصغر من مقامه. (ص ٤٣)

الكسر غير الاعتيادي Improper fraction: كسر بسطه أكبر من مقامه أو يساويه. (ص ٤٣)

الكسر في أبسط صورة Fraction in simplest form: كسر مكافئ حيث لا يوجد بين البسط والمقام عامل مشترك غير العدد واحد. (ص ٤٣)

المقام المشترك Common denominator: قيمة مشتركة يتم تحويل مقام كسرَين أو أكثر إليها، وتُستخدم في جمع الكسور وطرحها. (ص ٤٤)

المقلوب Reciprocal: الكسر الناتج عن تبديل البسط والمقام في الكسر، بوضع البسط في المقام والمقام في البسط. (ص ٤٦)

مكعب العدد Cube: ناتج ضرب عدد في نفسه، ثم ضرب الناتج في العدد الأصلي مرة أخرى. (ص ٢٦)

المماس Tangent: مستقيم يمس الدائرة في نقطة واحدة فقط. (ص ٩٦)

منصف الزاوية Bisector: مستقيم يقسم الزاوية إلى نصفين متساوين في القياس. (ص ١١٠)

الميل Gradient: انحدار المستقيم، وهو النسبة بين التغير في الإحداثي الصادي إلى التغير في الإحداثي السيني لمستقيم ما. (ص ١٨٥)

ن

النسبة المئوية Percentage: هي كسر مقامه العدد ١٠٠ (ص ٥٠)

نصف القطر Radius: قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة ونقطة على محيط الدائرة. (ص ٩٦)

نقطة المنتصف Midpoint: النقطة التي تقع في منتصف المسافة تماماً بين طرفي القطعة المستقيمة. (ص ٢٠٠)

و

الوتر Chord: قطعة مستقيمة يقع طرفاها على محيط الدائرة. (ص ٩٦)

مخطط فن Venn diagram: طريقة صورية لعرض عناصر المجموعات باستخدام الدوائر (أو المُنحنيات المغلقة) المُداخلة. (ص ٢٥٤)

مربع العدد Square: ناتج ضرب عدد في نفسه. (ص ٢٦)
مركز الدوران Centre of rotation: نقطة ثابتة يدور حولها شكل ثالثي الأبعاد، ويظهر الشكل نفسه بموقع مختلف. (ص ٢٠٧)

المستقيم Line: خط مستقيم يمتد إلى ما لا نهاية من كلا الاتجاهين. (ص ٩٨)

المضاعف Multiple: ناتج ضرب عدد في عدد صحيح موجب. (ص ١٦)

المُضلّع Polygon: شكل مستو مغلق له ثلاثة أضلاع أو أكثر، كلها مستقيمة. (ص ١٢٥)

المُضلّع المنتظم Regular polygon: مُضلّع جميع أضلاعه متساوية في الطول وجميع زواياه متساوية في القياس. (ص ١٢٥)

المُضلّع غير المنتظم Irregular polygon: مُضلّع أضلاعه وزواياه غير متساوية في القياس. (ص ١٢٧)

المعادلات الآنية Simultaneous equations: معادلتان أو عدة معادلات لها حلول تصح في كل منها. (ص ١٦٠)

المعادلة Equation: جملة رياضية تتضمن إشارة (=). (ص ١٦٨)

المعادلة الخطية Linear equation: معادلة يكون فيها أُس المُتغيّر يساوي ١ (ص ١٥٥)

معادلة المستقيم Equation of a line: صيغة تبيّن العلاقة بين الإحداثي الصادي والإحداثي السيني لجميع النقاط الواقعة على المستقيم. (ص ١٨٠)

المعامل Coefficient: في الحد الذي يحتوي على أعداد ومتغيرات، يكون المعامل هو العدد المضروب في المتغيرات. (ص ٨٦)

المقام Denominator: العدد السُفلي في الكسر. (ص ٤٣)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم في الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعاً. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

mauritius images GmbH/Alamy Stock Photo; Littlebloke/iStock/Getty Images Plus/
Getty Images; Axel Heizmann/EyeEm/Getty Images; DEA PICTURE LIBRARY/De
Agostini/Getty Images; TERRY MCCORMICK/Getty Images; KTSDESIGN/Science
Photo Library/Getty Images; akiyoko/Shutterstock; Beata Tabak/Shutterstock;
Panoramic Images/Getty Images; Image Source/Getty Images; Rathna Thamizhan/
Shutterstock; Fat Jackey/Shutterstock; Vitoria Holdings LLC/Shutterstock; Mahmoud
Ghazal/Shutterstock; Richard Sharrocks/Getty Images



رقم الإيداع : ٢٩٢٢ / ٢٠٢٠ م

الرياضيات

٩ كتاب الطالب

يذكر كتاب الطالب بالعديد من الموضوعات مع شرح واضح وسهل لكل المفاهيم المتضمنة في هذه الموضوعات، تليها تمارين تطبيقية لاختبار مدى فهم الطالب وللسماح له بتعزيز وممارسة المهارات الرياضية المطلوبة.

يتضمن كتاب الطالب:

- أقسام تذكر للمعرفة السابقة والتحقق من التعلم السابق
- تمارين في نهاية كل موضوع لتعزيز الفهم.
- أسئلة في نهاية كل وحدة من شأنها تأهيل الطالب لخوض الاختبارات.
- قاموس للمصطلحات يرد في آخر الكتاب.
- تمارين وسائل عامة تتناول جميع الموضوعات التي تم تغطيتها في كل وحدة.
- إرشادات لمساعدة الطالب على حل التمارين، بما في ذلك الأمثلة المحلولة والملحوظات المفيدة.

يشمل منهج الرياضيات للصف التاسع من هذه السلسلة:

- كتاب النشاط
- دليل المعلم

ISBN 978-99969-3-526-8



9 789996 935268 >